ISSN 1023-7526

傳播數學知識・促進數學教育

數學傳播

季刊

中央研究院數學研究所　發行

從等比級數談起

數學教育專題

漫談中學數學教師素養

藉題發揮　得意忘形

86
民國八十七年六月
第二十二卷第二期

數學傳播 季刊

稿 約

本刊以傳播數學知識及促進數學教育為宗旨。讀者對象包括中學、大學和研究所師生。大凡和數學有關之專題論述、教學心得、問題研討或書評書介都在歡迎之列。

來稿

一、文字應流暢精確, 以不超過一萬五千字為原則。

二、若有特定的讀者對象 (如中學程度、大學程度等) 請在文首註明。

三、較專技性文稿請附摘要, 並儘可能列出該文所使用之關鍵字、詞。

四、翻譯稿請附原文, 註明詳細出處, 並請取得原著作所有權人同意授權。

五、請用橫向有格稿紙繕寫清楚, 歡迎提供電腦磁片。

六、圖、表請用黑墨繪製白紙上, 黏貼文稿適當位置, 並請編列號碼。

七、翻譯稿所譯專有名詞, 其不常用或初用者請附註原文。

八、來稿請註明作者姓名、地址、服務機關或就讀學校及年級, 發表時可用筆名。

九、本刊對來稿有刪改權, 未能刊登稿件恕不退還, 請作者保留底稿。

十、請寄: 台北市南港區 (11529) 中央研究院數學研究所數學傳播編輯部。

發 行 人: 劉豐哲
出 版 者: 中央研究院數學研究所
地　　址: 臺北市南港區研究院路二段一二八號 (電話:27851211-轉382)
編輯委員: 劉豐哲、謝聰智、黃啓瑞、杜寶生、葉永南、黃振芳
編　　輯: 呂素齡
出版登記: 局版北市誌字第1110號
印 刷 者: 永裕印刷廠
打 字 行: 星格瑪企業社 (電話:2620-1648)
總 經 銷: 學英文化事業有限公司 新店市民權路130巷6號
郵政劃撥: 0100434-8 中央研究院數學研究所
特　　價: 新臺幣80元 (長期訂購一年300元)
經 銷 處: 全省各大書局

台　　北: 文翔、衆文、弘雅、書香林、建宏、文源、薪橋、東方、文笙、黎明、今日、南陽、曉園、聯經、再興、偉新、文林、藝殿
桃 竹 苗: 華竹、水木、展書堂、華通、大薪
台　　中: 諾貝爾、文星、三民、敦煌、東興、主恩、東與、寶山、新大方、光南、紀伊國屋、黎明、中一、五南
嘉　　義: 諾貝爾、義豐、大人物、鴻圖、一全、立大
台　　南: 南台、南一、欣欣、成大圖書部、成大書城、文山、金寶、敦煌、超越
高　　雄: 百世、復文、開卷田、三銘、開卷、瓊林、敦煌
屏　　東: 百科、卓越、大中、立大

中華郵政台字第3829號第一類新聞紙

數學傳播 季刊

編者的話

「教與學」是數學活動中重要的一環。基於對此問題的關注, 本刊特請任教於新竹科學園區葉東進老師策畫「數學教育」專題, 此專題不僅有教育理論的探討, 更有實際的教學經驗談。

在此專題中, 謝豐瑞教授從「教師的信念」及「教學內容知識」兩方面來談教師的自我成長。謝教授認爲這兩方面是息息相關的, 他以生動有趣的例子來說明其間關連。

葉東進老師認爲要教學雙方都能享有美好經驗, 內容的質量選取, 過程的推進安排都須用心與智慧。至於如何做呢? 請看他的「藉題發揮, 得意忘形」一文。

爲何我們教出的學生會說 $2.\overline{9} < 3$? 任教於新竹女中的王淑霞老師在「我們教出的學生說 $2.\overline{9} < 3$」一文, 舉例說明老師如何爲學生檢視錯誤, 澄淸觀念。

黃武雄教授「通識教育, 科學教育與數學教育 (上)、(下)」二文是從認知發展的角度, 去探討科學在通識教育中的定位。上篇以「理性的叛逆與解放」爲討論焦點, 分析法蘭克福學派霍克海默, 哈伯瑪斯及馬庫色等人的論點, 下篇則以「自然中的理論」爲重心, 探討何謂「數學中的六面山」以及「數學教育與通識教育」。

* * *

「從等比級數談起」— 林琦焜教授從等比數列出發, 引進矩陣的觀念, 又分別從極值和微分方程的角度來看固有値; 此外本文也對 Fibonacci 數列作了深入的研究。

自稱對數學一竅不通的荷蘭畫家艾希 (M.C. Escher), 他獨特的作品引起數學家強烈的共鳴。他的創作憑藉的是對「秩序和對稱」的著迷, 以及尋求把「構思用視覺來表達」並對「人類觀察與了解意味模糊之處作詮釋」。石厚高老師在「數學畫」一文對他的作品有詳細的介紹。

數學傳播季刊

86 第二十二卷 第二期

目錄

數學教育專題

漫談中學數學教師素養 …… 謝豐瑞 3

藉題發揮 得意忘形 …… 葉東進 10

我們教出的學生說 $2.\overline{9} < 3$ …… 王淑霞 17

通識教育、科學教育與數學教育 (上) …… 黃武雄 20

通識教育、科學教育與數學教育 (下) …… 黃武雄 36

從等比級數談起 …… 林琦焜 42

數學畫 …… 石厚高 54

才冠群雄的數學大師 …… 殷堰工 60

別瞧不起它, 那個中學教材中的公式 …… 柳柏濂 63

高斯EUCLID 環的除式個數 …… 宋秉信 72

映射數列問題 …… 張忠輔 · 楊世明 76

漫談中學數學教師素養

謝豐瑞

楔子

鬼的信念

筆者小時家住在一個小山腰上。山上有許多墳地。所以我家就成了送葬必經之路。每每聽到樂隊吹奏「驪歌初動, 離情黯黯, · · ·」, 我就偷偷的從門縫中向外看。感覺外面多樣的花朵、長排的車陣、吵雜的樂隊搞得氣氛格外熱鬧; 然而花車中往往有一個長長的木頭箱子, 許多人卻穿戴得怪七怪八的扶著箱子大哭小叫。這種好似衝突又融合的景象, 深深的吸引著好奇的我。在小小的心靈中印下了不知如何形容的深刻印象。

稍大時漸漸懂得, 原來木箱中躺了一個長眠的人, 而這件事, 值得那些穿得奇奇怪怪的親人哭斷肝腸。從此, 每當這些熱鬧又悲傷的隊伍經過我家門前時, 我仍會被吸引著去偷看, 但心中卻多了一層悲傷。

那時剛開始有黑白電視, 家裡省吃儉用買了一台。過了一陣子, 電視節目「八號分機」大流行, 浴室底下埋著死屍, 人被活生生的分屍裝袋, · · ·, 一件件的慘案, 一幕幕可怕的鏡頭呈現在我眼前。在我心中, 死亡不再是單純的停止呼吸, 不再是單純的埋入土中, 而是與慘死、變鬼畫上了等號。

從此, 每當那熱鬧又悲傷的隊伍經過我家門前時, 我仍會被吸引著從門縫中偷看, 但是, 在我的心裡卻悄悄的增加了害怕、恐懼。總覺得那些隊伍有些詭譎。木箱中的人不知會不會變成厲鬼? 扶著棺木哭的人是不是殺人兇手? 樂隊的人會不會被抓去當替死鬼?

更可怕的是, 這些事情會不會發生在我的周遭? 甚至我的身上? 於是, 在還沒被厲鬼吃掉, 還沒被抓去當替死鬼之前, 我已經變成了一個十十足足的膽小鬼。每天, 天色一暗, 就開始疑神疑鬼。床鋪下有鬼、桌子下有鬼、廁所裡有鬼、窗戶外有鬼、· · · 那些鬼眞是無所不在。

日復一日, 不知過了多少日子。漸漸的, 我愈來愈受不了。媽媽天生膽子大, 從不相信有鬼, 她說即使有鬼我們又沒害他, 他也不會來捉我們。我雖然相信她的話, 但是小小的心裡仍然怕得要命。一天晚上, 在被鬼搞得求助無門的時候, 我下了一個決心, 求人不如求己, 抱著大不了被鬼吃掉的必死決心, 我勇敢的瞪向「有鬼」的桌子底下, 結果 · · ·, 什麼也沒有。於是, 就這樣, 床鋪下、廁所裡,

家中裡裡外外幾乎都被我瞪過。只要一懷疑哪裡有鬼, 我的眼睛就瞪向何處。

從此, 小小的我變成了大膽鬼。在我的信念中這個世上是沒有鬼的。都是自己疑神疑鬼, 其實鬼根本不存在。每每有人和我提起怕鬼時, 我總會反問一句:「你看到過鬼嗎?」「沒看到怎麼知道有鬼?」

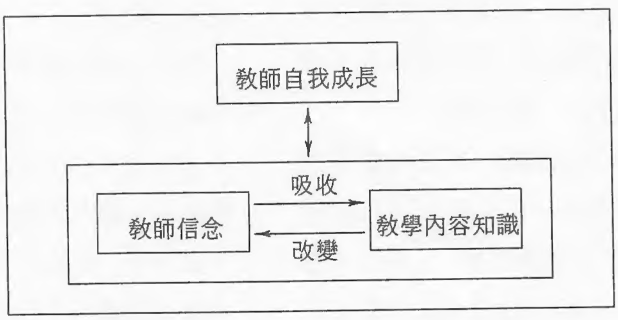
就在幾個月前, 發生了一件事, 又改變了我對鬼的信念。

又是電視惹的禍!在一個專播探索自然界現象的頻道上, 一個有關大象的節目深深的吸引了我。瑣瑣碎碎的細節就不累敍。直接從一位專門研究大象的博士談起。她深入研究象群的現象, 發現有時一隻母象在搖動牠的大耳朵時, 其他的大象也會跟著搖動。而同時, 她感覺到似乎有一股奇怪的氣流從象群中流向她。因此, 她懷疑這些大象正在交談。然而經過多次的觀察、實驗、錄音, 都聽不到任何聲音。這時, 她大膽的作了一個假設: 也許這些大象所發出的聲音超出了我們人類所能聽到的音頻極限。於是, 她使用了一種很特殊的儀器, 將母象耳朵擺動時周遭的聲音錄下, 再以極高倍數的速度播放, 果眞, 聽到了大象的叫聲。經過實驗發現這種頻率很低的聲音可以傳到數公里遠, 和遠方的象群連絡。

看完這個節目後, 不敢再說聽不到就是沒有, 也不敢再說看不到就是不存在了。「鬼」到底存不存在呢? 我不敢說。但是我敢說, 我對他的信念卻改了好幾次。

* * *

教師素養不是三言兩語可以談完的。筆者高中時的數學老師葉東進先生命我以一個師資培育者的角度來撰寫此文。師命難違, 答應後幾度輾轉難眠, 思考要如何在短短的幾千字中給老師們一些啓示。在幾經思考後, 決定從教師的信念及教學內容知識兩方面來談談教師的自我成長。這兩方面是息息相關的。我們可以從下圖中看出它們的一些關係: 教師的信念影響其是否願意吸收教學內容知識、從哪方面吸收等等; 教學內容知識豐富後, 教師的信念也會跟著改變; 如此不斷的循環, 教師自我也不斷成長, 這種成長也同時影響其信念及吸收知識的向度。



一、教師信念:

一般而言, 信念並非直觀的感覺, 並非盲目的信仰。那到底信念是什麼呢? 我們無法給它下一個明確的定義。大體來說, 可以把它想成是個體從大量的經驗中, 透過認知(隱涵的或外顯的), 在腦海中對經驗的歷程與所產生的結果形成印象。因爲新的經驗不斷的產生, 所以信念也會跟著逐步修改。除非個體對新經驗的認知與原有信念有強大的衝突, 否則信念是不會快速變動的。它們常常浮出來影響個體的行爲。楔子中筆者對鬼的信念即爲一例。底下的例子說明信念對行爲的影響。

裘先生的成長過程中母親管教嚴格。結婚後, 太太很溫柔。一天晚上, 他多喝了些酒, 微醺的回到家中。妹妹和太太正在客廳看電視。太太一看到他, 眉頭一皺, 以幾乎分不出是生氣或不捨的語氣說:「今天怎麼喝那麼多, 這樣會把身體搞壞的。」裘先生忙以道歉的語氣說:「對不起嘛！我知道妳會擔心, 下次我一定會節制一點。」這時媽媽走進客廳, 一看到微醉的兒子, 眉頭一皺, 以幾乎分不出是生氣或不捨的語氣說: 「今天怎麼喝那麼多, 這樣會把身體搞壞的。」裘先生立刻以不耐的語氣說: 「媽, 我已經三十歲了, 妳可不可以不要這麼這麼小的事也管。」妹妹坐在一旁, 不平的說: 「哥! 媽媽和嫂嫂說的話都一樣, 爲什麼你有這麼大的差別待遇?!」

同樣的內容、語氣, 在裘先生的眼裡竟有如此大的不同。雖然造成這種結果的因素可能很多, 但不可否認的, 信念絕對扮演著重要的角色。諸如, 在裘先生的信念中, 媽媽多數會爲了小事責備他, 而太太管他則是出於關心。也許他還有一個信念: 長大了媽媽就應該放手不管了; 但是結婚了, 太太管他卻是天經地義的一件事。

一位高中老師向我反應, 他一週要上21節數學課, 實在很累, 學校簡直是剝削勞力; 同校的另一位老師告訴我, 學校很照顧他們, 都讓他們超很多節課, 在學校的時間沒有浪費, 可以多賺一些鐘點費。

A老師是一位國中數學教師, 以往都是帶 A 段班。在學校實施常態編班後, 他抱怨這個制度, 認爲是國中教育最大的、有形的殺手; 因爲它的實施, 造成班級管理的困難, 爲了要等那些學習緩慢的同學, 剝奪了好學生的學習機會。C老師帶的多半是 C 段班, 他舉雙手贊成常態編班, 認爲它是學校教育的救星; 從實施後, 班上不再有一大票自我放棄的學生, 即使仍有一些學生學習困難, 但班級的管理、學生的求學態度和生活態度都有極大的改善。這兩位老師從不同的經驗中各自產生了不同的信念。一位教育專家在聽了他們的爭論後說: 「你們所說的情形我都知道, 不過我們應回到國中教育目標這個基本層面來看, 國中的教育是以生活教育、品德教育及及民主法治教育爲中心, 培養德、智、體、群、美五育均衡發展之樂觀進取的青少年與健全國民爲目的。所以, 在編班上, 我主張 ···。」

像這類的例子不勝枚舉。不同的信念, 使得個體在遇到事情時有不同的感覺及處理方式。正因爲如此, 在教學上, 教師的信念就

往往會影響教學的歷程及結果了。然而, 怎樣的信念才會對教學有幫助呢? 如果我告訴你什麼是應有的信念 (前提是眞的有「應有」的信念。), 那麼沒有經過足夠經驗的累積, 它也不一定會成爲你的信念。從和教師們接觸的經驗來看, 我發現唯有教師自己多聽、多看、多學, 才有機會培養出自我較成熟的教學信念。

現代的社會是一個多元化的社會, 開放的觀念和迅速的變化都是它的特點。要教育年輕的下一代, 就不能與他們的時代脫節。所以, 在我們聽、看、學的時候, 必須秉持著走出象牙塔的觀念, 以一顆開放的心、求新求變的態度來吸收教與學方面的知識。這樣才能拓展我們的視野、接受各種不同的觀點、作出最好的評估、孕育出自我最佳的教學信念。

教學信念涵蓋的範圍很廣, 無法一一述及。底下僅以抛磚引玉的心情來看一個例子。

數學與數學學習

如果有一天, 在下面這樣的討論中, 你可以插上一脚, 瞭解別人在說什麼, 自己也能提出自己的見解。那麼你就可以說:「我已經透過吸收知識, 對數學和數學學習有了自己的信念。」

甲師:「我贊成柏拉圖的觀點, 數學本來就存在於一個理想國度中, 雖然我們看不到、摸不到, 但是我們可以慢慢的去發現。既然她是本來就存在的, 我們當然應該去認識、學習她。」

乙師:「我不認爲她是存在於理想國裡的, 我覺得亞理斯多德的觀點比較有意義, 數學是我們人類從生活周遭的事物中一層一層抽象出來的, 而學生應學的是她在生活中代表的意義。」

丙師:「其實你們也別爭個半天, 數學最重要的就是她的形式化。我們自己給些定義規則, 在滿足我們所定的規則下, 經過推導而得。」

丁師:「如果從數學史的發展來看, 數學家往往是根據已有的數學基礎, 作一些猜測、假定, 再經過一些數學或科學的推理、實驗方式獲得的。所以學生也應該這樣的學, 讓他們自己去假設, 再經過邏輯的或數學的推理方式得出他們自己的數學知識, 這樣才有意義。」

乙師:「所以你是比較偏向建構主義的學習理論囉! 但是我覺得以學生的那一點點小程度, 他們哪能推出什麼東西! 就拿負數來說, 當時數學家們還不是吵翻天, 推理來推理去的, 有人承認負數, 有人不承認負數。學生哪有能耐得出什麼結論。」

丁師:「但是如果只要他們不斷的練習再記住結果, 等到不用的時候還不是忘光了。什麼也沒有了。還不如讓他們經歷這個發現、推理的歷程, 至少對他們的推理能力有所幫助。」

二、教學內容知識

在這兒說的教學內容知識包括: 所要教的內容之「正確」知識是什麼、和她相關的知識有哪些? 這個知識在各種不同的領域中所扮演的角色是什麼? 應教到什麼範圍? 難度? 等等。它不僅牽涉到數學知識, 也牽涉到數學本身以外的知識。同樣的, 在這兒, 我們也只想做拋磚引玉的工作。

底下所述學生的疑惑都是確實有學生提出過的。

函數外一章

以函數的例子來說, 如果你曾有過類似下面的經驗, 你就可以很驕傲的認爲自己是位上進的老師, 不斷的在充實自我的教學內容知識。

生:「老師, 爲什麼有人要發明函數這個東西?」

師:「因爲· · ·? 你問那麼多做什麼? 好好把它學會就好了。」(似乎有點遜!)

生:「但是我常常想這個名稱好抽象,『函數』這兩個字和你上課說的『x 值給定時, y 的值也隨著確定』有什麼關係? 」

師:「那是定義嘛, 數學定義當然要給名稱啊!」

生:「可是我們國中時, 老師是說, 函數是一種對應關係。」

師: 那和我們的定義是一樣的, 自變數 x 和應變數 y 之間的關係就是一種對應關係。」(有點道理。)

生:「可是國中時, 老師說可以把天數對應到月分。所以我可以把31對應到 January, 28對應到 February, · · ·, 月分也可以不用數表示。」

師:「但是月分也可以用數表示!?」(有點困惑了!)

生:「到底對應關係是不是一定要是數之間的關係? 把小孩對應到親生父親可不可以算是函數?」

師:「應該可以。」(應該?)

生:「如果不是數的對應關係, 那爲什麼要稱爲函『數』呢?『函』又是什麼意思?」

師:「這個老師回去查查看。」(不再用定義來搪塞了。)

經過一年, 又到了要教函數這個概念的日子。上課鈴聲想起。師愉愉快快的走進教室。

師:「各位同學, 你們知不知道地球是繞著太陽轉的?」

生:「老師! 別開玩笑了, 你當我們是· · ·。」

師:「你們知道嗎? 這個理論是由哥白尼提出的, 但是當時很多人並不相信, 大約在三百多年前, 有一位發明大師他用自己發明的望遠鏡證實了這個理論, 但是卻因爲這個事件被判犯了邪說罪, 遭到軟禁, 到78歲時, 在軟禁中去逝。他的罪名直到1980年, 也就是十八年前才被宣布取消。這個倒霉的科學家叫伽利略。· · ·」(師正在說一個有關函數祖師爺的故事。)

在介紹到尤拉用了 $f(x)$ 的函數符號後, 師進行了函數的課程。學生似乎覺得函數不再那麼冰冷。

又到了上數學課的時間, 師仍然愉愉快快的走進教室。

師:「上次我們說到那位新好男人尤拉用 $f(x)$ 來代表函數。今天我們來看看在我國, 一百三十多年前, 清朝數學家李善蘭和英國人佛烈亞力 $\cdots$, 函數的名稱我們一直沿用至今。但是過了二十多年後, 又有一位叫戴德金的數學家把函數的定義又放寬了, $\cdots$。」

師終於知道函數名稱的由來了, 也知道了爲什麼名稱爲函「數」可是對應關係卻不用限制在數與數之間。同時師也發現到「正確知識」中的「正確」是會依時代而改變的。

多項式外一章

以多項式爲例, 如果有一天, 你能幫助下面這位可憐的教師回答他的學生提出的問題, 那麼你就可以放心的說:「我對多項式這個概念的教學內容知識足夠了。」

生:「老師, 爲什麼要把非零的常數多項式次數定爲0?」

師:「你這個問題很好, 可見你有用腦筋想。因爲我們可以把 $a_0+a_1x+a_2x^2$ 寫成, $a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2$, 所以可以把 a_0 寫成a_0x^0, 因此它的最高次數爲 0。」(嘗試給一個合理的答案。)

生:「那零多項式的次數爲什麼不定義爲 0? 而要說它沒有定義呢?」

師:「因爲我們說多項式的次數是係數不爲0的 x 的最高次數。零多項式沒有一項可以使係數不爲0, 所以不定義次數。」(似乎是一個合理的答案。)

生:「老師, 我還是覺得怪怪的, 是不是像 x^2+x+1 這種多項式可以把它寫成 $x^2+x^1+x^0$?」

師:「可以。」

生:「我們以前不是說 0^0 沒有意義嗎? 所以這個多項式的 x 就不能等於0了, 要不然它的常數項就會沒意義, 是不是?」

師:「這個嘛$\cdots$?」(合理性? 迷思了!)

生:「老師, 到底多項式中的 x 代表的是未知數還是變數?」

師:「應該是變數$\cdots$!?」(數學素養還有一點作用。)

生:「那這些變數是不是要排除0 ?」

師:「這個嘛$\cdots$?」(師也認知衝突了!)

生:「既然 x 是變數, 那麼它的四則運算不是就和數的運算相同了嗎? 爲什麼還要特別去講它的運算?」

師:「這個嘛$\cdots$? 」

⋮

生:「老師, 爲什麼 $\frac{1}{x}$ 與 $|x|$ 不是一次函數?」

師:「因爲 $\frac{1}{x}$ 中的 x 在分母, x 在0沒有定義$\cdots$」(又牽涉到0, 師沒有把握了!)

師:「因爲 $\frac{1}{x}$ 可以寫成 x^{-1}, x 的次數是-1, 不是1。」(師嘗試用另一種說法。)

生:「爲什麼可以把它寫成 x^{-1}?」

師:「嗯, $\cdots$。」(眞是一波未平一波又起。)

生:「那先說爲什麼 $|x|$ 不是一次函數好了。」

師:「嗯$\cdots$, 因爲一次函數指的是沒有絕對值的!?」(屋漏偏逢連夜雨。)

生:「爲什麼要限定它沒有絕對值? 」

師: 「嗯, · · ·。」(師想: 一定有一個合理的答案才對。)

讀者可以看出來, 本文並沒有提供完整細膩的教師素養題材。只想藉這個機會談談教師的自我成長, 並提供一些可以思考的方向。事實上, 可以思考的方向仍非常非常的多。二十多年前, 筆者就讀於台中曉明女中, 當時葉東進老師即曾經在課堂上實施過數學閱讀測驗, 令筆者記憶深刻。二十多年後, 筆者常看到許多老師上課時仍一味的講述。如果時代在進步, 社會在多元化, 而我們的教學仍停頓、甚或倒退, 那麼我們的教育就值得擔憂了。在此, 我希望能與教師們互勉: 教學生涯是一種不斷反省思考的歷程, 唯有養成終生學習的態度, 才能使我們的教學更上一層樓。

參考資料

1. 國立編繹館, 民 78, 高級中學基礎數學第一册, 國立編繹館出版。
2. 國立編繹館, 民 81, 國民中學數學第三册, 國立編繹館出版。
3. 國立編繹館, 民 87, 國民中學數學教師手册第三册, 國立編繹館出版。
4. 謝豐瑞, 陳材河, 民 86, 函數的一生, 科學教育月刊, 第199期, 第34-43頁, 國立臺灣師範大學科學教育中心。

—本文作者任教於國立臺灣師範大學數學系—

藉題發揮 得意忘形

葉東進

幾天前，應一位親戚之邀，回南部參加他女兒的訂婚禮，按當地習俗，請來廚師，就著住家附近巷道，做起外燴，宴請賓客。酒席內容，山珍海味，材料道地，面子十足。吃喝之間，只見佳餚美食，一道端上，尚未用完，緊接一道，不多一會，桌面已擺滿四五道菜，此時衆家賓客，美味當前，不見評頭論足，讚賞喝采，卻只自顧埋頭苦幹，吃著，塞著，過不多久，便見前面幾道菜已現盤底，而廚師們也顧不著食客的消化與否，反倒新的料理仍是一盤又一盤的端上又更替，到得後來，盤中美食，有些僅被淺嚐幾口，有些稍被翻動，有些甚至到席散仍是原封不動，實在可惜，眞是糟蹋。原先滿腹的食慾，被脹滿的壓迫感取代，開始時想像美味的期待，換得的是宴後的一種負擔。這種不舒服的經驗，其實在許多的宴飲場合是屢見不鮮的，它是台灣的文化之一。

飲食文化，也深深地影響教學的內容，俗又大碗是其一，急就章草草結束是其二。口中狼吞虎嚥，肚裡塞著撐著，最後消化不良，再沒一點味口，這不只是飲食現象，也是教學寫照。

要教學雙方都能享有美好經驗，內容的質量選取，過程的推進安排都須用心與智慧。優質的教學，如同健康的飲食，不是比量多，是求質精；不是比進度，是求深刻。

怎麼做呢？我提出兩點：

一是藉題發揮

一是得意忘形

藉題發揮是指藉一道問題的解決，在過程中，教師提出幾個相關的子問題，透過師生的互動、討論、思辨而逐漸釐淸問題，契近問題核心，擬出解題策略，最後甚至擴展問題，加以發揮。這些子問題主要在幫助學生 (1) 觀察問題，搜尋經驗 (2) 明白問題，找出因果 (3) 看淸問題，激發想像。

而得意忘形，是指教師在新題材的介紹上，強調內容的意義及方法的運用，在過程中，提供機會，以活動學生的舊有知識及經驗，避免教學落入證明公式、記憶公式、代算公式的形式中。

底下用兩個例子說明上述觀點。

例 1：試證明

$$16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$$

(此一問題出自牛頓版, 高中基礎數學第二冊, p.206。問題出現之前, 課本有提及: 設 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$, $n\in\mathbb{Z}$, 則 $\alpha^n+\alpha^{-n}=2\cos n\theta$, $\alpha^n-\alpha^{-n}=2i\sin n\theta$)。

對此問題, 教師如果僅僅急著要去講解課本上的解法 (註), 草草結束, 沒有什麼聯想, 不作任何發揮, 實在可惜, 眞的糟蹋。要求精緻, 要談建構, 教師這時候不妨使用下列提問的方式引導學生進行思考、聯想、整理及思辨:

請你們把這個待證的等式仔細多看幾遍, 作番觀察。

發現什麼嗎?

等式左邊是 $\cos\theta$ 的五次方, 右邊呢? 右邊怎麼說?

是 $\cos 5\theta$, $\cos 3\theta$ 與 $\cos\theta$ 的一次組合, 是不是?

另外還發現什麼嗎?

注意到係數間的關係了嗎? 看到係數間的關係 $16=1+5+10$ 以及 $1,5,10$ 這三個數的排序, 聯想到什麼嗎?

它只是一種巧合嗎? 或者可能是某一規律的顯示呢?

能不能找一個更簡單的等式, 它也顯示類似的規律呢? 我的意思是比如左邊要是 $\cos^3\theta$ 的話, 這時等式會是什麼呢?

是不是 $4\cos^3\theta=\cos 3\theta+3\cos\theta$?

這個式子是眞確的嗎?

它跟你們學過的三倍角公式有關嗎?

它就是餘弦的三倍角公式, 對不對? 所以它是眞確的囉!

這樣看來, 似乎是眞有一個規律存在!?

我們一起來猜想看這一規律大概是什麼樣子。

有什麼譜嗎?

如果等式左邊是 $\cos^7\theta$ 的話, 按照你們心中猜想的規律, 這個等式是什麼?

$64\cos^7\theta=\cos 7\theta+7\cos 5\theta+21\cos 3\theta+35\cos\theta$, 對嗎?

你能確定上面的等式是眞確的嗎?

還不能! 對不?

如果眞是成立的話, 把 θ 取一特定的值代入左右兩邊, 分別計算求值, 兩者應該相等才是, 否則就可以說等式是不眞確的, 對嗎? 這確是一個檢驗的好主意!

比如取 $\theta=60^\circ$, 大家算看看。

結果怎樣? 兩邊的值果然相等, 是不? 你因此可以說等式是眞確的嗎?

不能! 對的, 我們還不能因此就說等式是眞確的, 但是經由剛才的檢驗, 你們更加相信等式是眞確的, 是嗎?

雖然, 我們現在還沒有工夫去確定這些等式是否眞確, 不過, 叫人鼓舞的是, 大家經由對原先問題的觀察, 似乎已經發現了一個一般性的規律, 這實在太好了。

當然, 如何把這個規律用一個數學式子明確表示, 並且給予證明, 是後續的重要事情。可是別急, 大家要是稍加想像的話, 在目前, 這可不是件容易的事, 待我們回到最開始的那道問題上, 看看有些什麼可能的證明方法, 解決之後, 再來談一般性的問題, 說不定心中就會出現較好的點子。

開始的問題是要證明

$$16\cos^5\theta=\cos 5\theta+5\cos 3\theta+10\cos\theta$$

依你們以往的經驗, 是從左邊證往右邊呢? 或是從右邊證往左邊較為方便?

從以簡御繁, 化繁為簡的策略來看, 應該是從右邊證往左邊較好吧?

很好, 所以左邊的 $\cos^5\theta$ 就是你們要證明的目標, 請大家看清楚, 它是 $\cos\theta$ 的一個五次單項式; 至於右邊呢? $\cos 5\theta$, $\cos 3\theta$ 跟 $\cos\theta$ 有什麼關係嗎?

$\cos 3\theta$ 可以寫成 $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, 而 $\cos 5\theta$ 嘛, 應該也可以寫為 $\cos\theta$ 的五次多項式!?

怎麼說呢?

因為把和角公式 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 中的 α 看成 3θ, β 看成 2θ, 再利用已知的二倍角、三倍角公式就行了。

不錯, 大家就演算看看。

結果呢?

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

很好!

到這裡, 我們暫且走岔一下。不知道你們有沒有注意到 $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$ 可以分別表為 $\cos\theta$ 的二次及三次多項式, 而今, $\cos 5\theta$ 也可以表為 $\cos\theta$ 的五次多項式, 是不是因此推想: $\cos\theta$ 可以表為 $\cos\theta$ 的 n 次多項式呢? 事實上, 這件事是對的, 建議你們回去後想想看, 能不能用數學歸納法證明? 這證明中間可能還會涉及到 $\sin n\theta$ 是否可以表為 $\sin\theta$ 的 n 次式及一些其它的問題, 總之, 還滿複雜的。這是一個節外生枝的問題, 不是這裡的三兩句話可以交待清楚, 有興趣的話研究看看就是了。

現在, 還是回到原來的問題上。

既然 $\cos 5\theta$, $\cos 3\theta$, $\cos\theta$ 都是 $\cos\theta$ 的多項式, 所以從右邊證往左邊這件事, 其實只不過是把 $\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$ 化簡成 $\cos\theta$ 的多項式, 看看結果是不是 $16\cos^5\theta$ 罷了。

所以諸位已經看到, 證明並不困難, 只須先把問題的意涵搞清楚。

不過, 要提醒你們注意的一個有趣問題是, 那些係數 $1, 5, 10$ 是怎麼發現的? 為什麼不是其它的數呢?

證明是一回事, 發現等式又是一回事。

改換一個角度來看, 要是想從等式的左邊證往右邊, 便相當於如何把 $\cos^5\theta$ 表為 $\cos 5\theta$, $\cos 3\theta$ 與 $\cos\theta$ 的一次組合, 而這也算是一種以簡御繁的觀點, 因為, 五次的東西用一次的組合表示。

前面已經學過, 如果取 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$, 就有 $\alpha^n + \alpha^{-n} = 2\cos n\theta$, 因此,

$$\begin{aligned}\cos^5\theta &= \left(\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32}(\alpha^5 + 5\alpha^4\alpha^{-1} + 10\alpha^3\alpha^{-2} \\ &\quad +10\alpha^2\alpha^{-3} + 5\alpha\alpha^{-4} + \alpha^{-5}) \\ &= \frac{1}{32}[(\alpha^5+\alpha^{-5}) + 5\alpha\alpha^{-1}(\alpha^3+\alpha^{-3}) \\ &\quad +10\alpha^2\alpha^{-2}(\alpha+\alpha^{-1})]\end{aligned}$$

但是 $\alpha\alpha^{-1} = 1$

$$\therefore \cos^5\theta = \frac{1}{32}(2\cos 5\theta + 10\cos 3\theta + 20\cos\theta)$$

也就是 $16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$

對上面的證明, 你們有什麼感覺?

有沒有些許的感動?

原本是一個三角的問題, 但是通過複數這一條新的路徑, 證明竟顯得如此簡潔。是不是叫人著迷?

還有, 這樣的證明又帶給我們什麼其它的啓發? 是不是同樣的方法, 都可以讓我們找到 $\cos^{2n+1}\theta$ 的有關等式? $\cos^{2n}\theta$ 又如何? 甚至 $\sin^n\theta$ 呢? 這些問題就留給你們好好的想一想, 仔細的做一做。

千言萬語要交待的是, 只有通過解題的實踐, 才有機會整合你們的知識, 融會貫通, 形成網絡, 產生有效的經驗。

例2: 於空間中, 證明點 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距離爲

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

這個例子, 是每一課本, 每一教材在介紹空間向量與空間平面時, 都會提到的一個公式, 本無新奇, 不過, 僅僅把它視爲一個公式, 教它的證明, 之後, 舉個實例, 代入計算, 便就結束, 是相當可惜的。因爲透過這個問題的出現, 教師在完成它的證明的介紹之前, 可以用一些子問題向學生釐清「距離」這一概念, 過程中整合他們的某些知識, 讓學習的經驗流動而不凝阻, 避免教學落入一種只是證明、代公式、演算的形式中。

教師或許可以如下提問:

你們曾經學過哪些跟距離有關的事情?

點與點, 還有呢?

還有平面上, 點與直線。

就是指這個距離公式 $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 嗎?

這個公式怎麼來的, 知道嗎?

$\cdots\cdots$

忘了?

沒關係, 讓我們耐心地從頭開始。

能不能告訴我, 什麼叫距離?

$\cdots$, 距離就是線段長。

什麼樣的線段?

最短線段!

你說的最短, 能不能把它的涵意說清楚?!

就是說兩個圖形間可能連接的線段中最短的。

說的非常好, 如果用 $\min\{\overline{PQ}|P\in S_1, Q\in S_2\}$ 表示圖形 S_1, 與 S_2 間的距離, 是不是把你的意思表達得更明確?

這樣說來, 兩點 A, B 間的距離就是唯一的 $\overline{AB}$ 了。

而如果平面上, 給點 $P(2,-1)$ 及直線 $\ell: 3x-y-2=0$, 那麼 P 與 ℓ 的距離就是 $d(P,\ell)=\min\{\overline{PQ}|Q\in\ell\}$, 怎麼求這一個距離呢?

Q 是 ℓ 上的動點, 怎麼表示 Q 的位置呢?

用坐標!

對的, 但怎麼表示呢? 就說 $Q=(x,y)$ 行嗎?

不行。

爲什麼?

因爲這樣的表示, 沒有把 Q 落在直線 ℓ 的這一事實呈現出來, 應讓寫成 $Q=(x,3x-2)$ 才是。

很好! 因此這時候, 我們看到 $\overline{PQ}^2$ 是跟著 Q 的位置而變動, 也就是隨著 x 的值而變動, 這之間的變動, 我們可以用下面的式子表現出來:

$$\overline{PQ}^2=(x-2)^2+(3x-1)^2$$

現在, 我們的目標變成如何求上面一式的最小値, 這是你們已經熟習過的問題不是嗎? 怎麼做?

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2&=10x^2-10x+5\\&=10(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

所以 $\overline{PQ}$ 的最小值就是 $\frac{\sqrt{10}}{2}$, 隨之, P 與 ℓ 的距離等於 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

如果順便想知道在 $\overline{PQ}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 時, Q 的位置, 也就是 Q 的坐標, 怎麼辦呢?

因爲是當 $x-\frac{1}{2}=0$ 時, 才取得 $\overline{PQ}$ 的最小值, 這時 $Q=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$。

是的, 那麼再問: 這時候的 $Q=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 確是點 P 在 ℓ 的投影嗎? 也就是 PQ 果眞與 ℓ 垂直嗎? 請你們檢驗。

你們怎麼檢驗的呢?

喔, 有人用兩直線的斜率乘積是否等於 -1 去判斷, 不錯!

嗯, 還有人用向量 $\overrightarrow{PQ}=(\frac{-3}{2},\frac{1}{2})$ 與直線 ℓ 的法向量 $(3,-1)$ 是否平行作判斷, 眞的太好了。

接著, 讓我們來看一個對你們來說是一個新的問題, 即空間中, 求點與平面的距離的實例。

給點 $P(-1,2,-4)$ 及平面 $E: x-y-z-3=0$, 要求 P 與 E 的距離 $d(P,E)$。

像上一個例子一樣, 假定 Q 是 E 上的動點, 要求 $d(P,E)$ 就是要求 $\overline{PQ}$ 的最小值。怎麼表示 Q 的位置呢? 也就是怎麼設定 Q 的坐標呢?

當然不能寫成 $Q=(x,y,z)$, 因爲這樣的表示沒有顯示 $Q\in E$ 這個事實。

寫成 $Q=(x,y,x-y.-3)$ 行嗎?

確是可行,

這時候, 我們仍然把 $\overline{PQ}^2$ 用 x,y 來表示, 就是:

$$\overline{PQ}^2=(x+1)^2+(y-2)^2+(x-y+1)^2$$

怎麼求上面一式的最小值呢? 仍然用配方法:

$$\begin{aligned}&(x+1)^2+(y-2)^2+(x-y+1)^2\\&=2(x^2-xy+y^2+2x-3y+3)\\&=2[x^2-(y-2)x+y^2-3y+3]\\&=2[(x-\frac{y-2}{2})^2+\frac{3}{4}(y-\frac{4}{3})^2+\frac{2}{3}]\end{aligned}$$

諸位看到, 要是讓 $x-\frac{y-2}{2}=0$ 及 $y-\frac{4}{3}=0$, 這時候 $\overline{PQ}^2$ 取得最小值 $\frac{4}{3}$, 也就是 P 與 E 的距離等於 $\frac{2}{\sqrt{3}}$。而同時, 我們得到 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{4}{3}$, 就是說, 這時候的點 Q, 其坐標爲 $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{14}{3})$。

當然, 我們也可以檢驗看看, 此時的 $Q=(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{14}{3})$ 是否就是點 P 在平面 E 上的投影。在上一例中, 有人想到要用向量 $\overrightarrow{PQ}$ 是否與直線的法向量平行去判斷, 這時候, 也是可以仿照著做, 看看 $\overrightarrow{PQ}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ 是否平行平面 E 的法向量 $(1,-1,-1)$?

現在, 我要給你們一個問題:

給空間中的兩條直線 $\ell_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ 與 $\ell_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$, 求 ℓ_1 與 ℓ_2 的距離 $d(\ell_1, \ell_2)$。

在你們進行求解之前, 先給些提示。

因爲 $d(\ell_1, \ell_2) = \min\{\overline{PQ} | P \in \ell_1, Q \in \ell_2\}$, $\overline{PQ}^2$ 是由兩個動點 P 與 Q 的位置所決定, P 與 Q 的坐標決定了 $\overline{PQ}^2$ 的值。

如果取 $P = (2s+1, -s-1, 3s)$, 而 $Q = (t-2, 2t+1, -2t-1)$, 請你們完成下列諸步驟:

(1) 把 $\overline{PQ}^2$ 表爲 s 與 t 的二次式。

(2) 求出上式的最小值, 因而得出 $d(\ell_1, \ell_2)$ 是多少?

(3) 找出使 $\overline{PQ}$ 最小的 s 與 t 值, 隨之得到對應的點 P 與點 Q 的坐標。

(4) 檢驗 (3) 中之 P 與 Q 是否使線段 PQ 垂直 ℓ_1, 同時 PQ 也垂直 ℓ_2?

各位已經看到, 即使面對一道新的問題, 你們舊有的知識與經驗, 有時仍派得上用場, 不要以爲解新問題就非要新方法新工具才行, 總要先嘗試解決看看, 不行再另想辦法。這種態度, 不僅使我們的知識常得到歷練整合的機會, 而且對於新知識, 新方法, 反倒更易明白它們的意涵及定位, 建立健康而有效的接納。

現在, 讓我們回到開始的那一個距離公式

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

看看它是怎麼來的?

我們用向量這一新的工具作如下的分析:

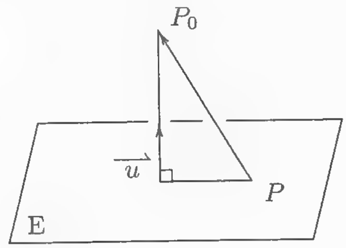
取平面 $E : ax + by + cz + d = 0$ 上的任意點 $P(x, y, z)$,

因此有 $d = -(ax + by + cz)$

隨之

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

上面最後一式可看作是兩個向量 $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c)$ 與 $\overrightarrow{PP_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ 的內積的絕對值, 其中 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 爲已知點, 它的一個幾何意義是 $\overrightarrow{PP_0}$ 在平面 E 的 單位法向量 $\overrightarrow{u}$ 的投影長, 從附圖, 我們看到這個投影長就是 P_0 與平面 E 的距離 $d(P_0, E)$。



各位已見識到, 我們從向量觀點看這一個距離公式, 它的意涵只不過是個投影長, 因而領會到, 比起前面例中所使用的配方法, 向量在作爲一種解題的工具上所展現的簡潔與力量。

學到的知識, 如果僅是片片落葉, 沒有關聯, 看不出脈絡, 學習就易成爲無趣的經驗, 痛苦的負擔。教師儘管熱情, 生怕學生吃不夠喝不足, 佳餚一盤盤的端上, 但是未經充

分咀嚼細細品味, 硬往肚中充塞, 到後來, 就只是脹滿的不快經驗, 哪存有美味餘香? 因此, 教學中, 藉問題而發揮, 得其意而空形, 帶領學生進入整合、聯想與創造, 如同美食, 從材料的準備, 過程的調製, 到端上桌後色香味的評品, 過程的經歷, 就是一場美宴, 一種享受, 一次豐富的建構。

註: 課本上的解法:

設 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$, 則知

$$\alpha^n+\alpha^{-n}=2\cos\theta$$

因此

$$\begin{aligned}
&\cos 5\theta+5\cos 3\theta+10\cos\theta\\
&=\frac{1}{2}[(\alpha^5+\alpha^{-5})+5(\alpha^3+\alpha^{-3})\\
&\quad+10(\alpha+\alpha^{-1})]\\
&=\frac{1}{2}(\alpha+\alpha^{-1})^5\\
&=\frac{1}{2}(2\cos\theta)^5\\
&=16\cos^5\theta
\end{aligned}$$

—本文作者任教於新竹科學園區實驗高中—

我們教出的學生說 $2.\overline{9} < 3$

王淑霞

問題一: $0.\overline{9} < 1$ 嗎?

如果我們問國小五, 六年級的學生 : $0.999\cdots$(小數點後沒完沒了的9) 跟1比大小, 那一個大?

如果我們問國中生: $0.\overline{9}$ 與1那一個大?

如果我們再去問高中生 (正在念或念過了第一冊第二章數列與級數者): $0.\overline{9}$ 與1那一個大?

相信得到的答案大多是: $0.\overline{9}$ 比1小!! (有數據爲證, 參考附錄1)

但是如果再繼續問高中生: 無窮等比級數: $\frac{9}{10}+(\frac{9}{10^2})+(\frac{9}{10^3})+\cdots+(\frac{9}{10^n})+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$ 的和是多少? 答案眞是令人滿意: $\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$! 不妨再問一次: $0.\overline{9}$ 與1那一個大? 答案還是1比較大!! 那我們不妨把1與$0.999\cdots$ 拿來減一減, 當然用大的減小的嘍! 而且用直式減:

$$\begin{array}{r} 1.0000\cdots \\ -\ 0.9999\cdots \\ \hline 0.0000\cdots \end{array}$$

發現相減後的數小數點後每一位都是0, 總有一位是1吧!不行! 都被後一位借1借走了!怎麼寫都是0!! 國小, 國中, 高中學生都迷惑了! 心頭也被震撼了一下, 好奇怪的事?!這眞是個好的開始, 得好好引導學生認清: $0.\overline{9}$ 到底是什麼東西?

先從數的符號認識起吧!例如:123是什麼? 是十進位數, 是 $3+2\times10+1\times100$ 的簡寫; 0.123 是 $1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10^2}+3\times\frac{1}{10^3}$ 的簡寫; 0.999是 $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}$ 的簡寫; 那麼 $\underbrace{0.999\cdots9}_{n個}$ 是 $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}$ 的簡寫; 發現以上諸數都是有限項和的簡寫, 有限項的和就叫作有限級數, 而 $0.\overline{9}=\frac{9}{10}+(\frac{9}{10^2})+(\frac{9}{10^3})+\cdots+(\frac{9}{10^n})+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$ 是無限項的和, 又叫無窮級數的和, 所以 $0.\overline{9}$ 是一個無窮級數和的簡稱, 那麼無限項的和要怎麼算? 只能一項項加嘛! 萬丈高樓平地起呀! 先從第一項加起: 令 $S_1=\frac{9}{10}$, $S_2=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}$, $S_3=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3},\ldots$, 一項一項加, 加到第 n 項, $S_n=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots+\frac{9}{10^n}$, 此爲一個有限等比級數, 其和爲 $1-(\frac{1}{10})^n$, 而 n 越大的話, 第一項加到第n 項的有限 n 項和就越來越接近無限項的和, 所以如果 n 越大, 有限項和越來越靠近"某個數"的話, 那麼這個"某個數"就應該等於無窮級數的和 $0.\overline{9}$!! 故而觀察一下 $S_n=1-(\frac{9}{10})^n$, 當 n 越大時, S_n 越靠近的"某個數"是什麼? 答案是1!! 所以 $0.\overline{9}=1$。這麼一來,1的表法不是

唯一了! 同樣的, $2.\overline{9}=3.0$, $2.54=2.53\overline{9}$, 任何一個有限小數都可改爲無窮小數。把以上的思路過程一般化, 得到無窮級數和的定義:

欲求無窮級數的和, 先求前 n 項部分和 S_n, 再看 $n\to\infty$ 時, $S_n\to$"某個數", ($\to$ 唸作趨近), 如果"某個數"存在的話, 就規定此無窮級數的和等於"某個數"。又" $n\to\infty$ 時, $S_n\to a$ "這個現象用記號 $\lim_{n\to\infty}S_n=a$ 表示, 極限的符號及概念也因此很自然被引進來了!! 所以符號 $\lim_{n\to\infty}S_n=a$ 只是表示當 n 趨近於 ∞ 時, 數列 S_n 逼近 a 這一現象而已; 極限沒有什麼好怕的!

又若學生反駁: 無窮級數的和 $=\lim_{n\to\infty}S_n$, 那是定義中規定的, 實際上是不是眞的相等, 天知道! 那麼我們不妨再以莊子的名言作印證, 以顯示定義中的規定合理, 有理!

莊子有言: "一尺之繩, 日取其半, 萬世不竭", 故若把每天取的繩長累計下來由第一天到第 n 天取的總和得: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=S_n$, 如果 n 越來越大的話, S_n 越來越逼近繩子的總長1, 另外從 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-(\frac{1}{2})^n$, 其中 $(\frac{1}{2})^n$ 趨近於0, 所以 $1-(\frac{1}{2})^n$ 趨近於1, 兩個途徑的結果相吻合!

以上述方式作爲無窮級數和的教學以及數列極限概念的引進, 不知道 (心裡盼望) 可否讓學生對這兩種概念的吸收容易些, 恐懼感也少一些? 也盼望再問一次: $0.\overline{9}$ 跟1誰大? 答案也許會令人滿意開心呢!

問題二:

設 $\overrightarrow{a}=(-1,2)$, $\overrightarrow{b}=(1,b)$, 滿足條件: $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 150°, 求 b。(題目來自於76年師大科教中心版高中數學教科書第二册習題4-4)

大多數學生的解法如下:

$$\because \cos 150^\circ=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

$$\therefore \frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

兩邊平方

$$\frac{(2b-1)^2}{5(b^2+1)}=\frac{3}{4},$$

得解

$$b=8\pm5\sqrt{3}。$$

但正確答案爲 $8-5\sqrt{3}$。

仔細審視上述解法過程, 曝露了學生學習上的兩大問題, 而這也是我們在第一線工作者要注意的:

(一) 好習慣的培養問題: 一般教科書上的習題, 書後均附有答案, 學生算完後應馬上對答案, 答案有問題, 應立即檢視錯誤的原因, 挑出是觀念理論的錯誤還是計算習慣不好導致的錯誤, 不好在那裡, 找出來努力去修改, 例如, 兩邊平方的計算, 一般學生常犯的錯誤是左邊平方算完, 右邊就照抄, 忘了平方, 找到錯誤所在, 對症下藥, 不妨先在兩邊打上平方的記號, $(\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}})^2=(\frac{-\sqrt{3}}{2})^2$, 再繼續往下算, 那麼這種錯誤就可避免了; 這樣的面對問題方式, 相信比把學生叫來體罰打手心了事有意義多了! 而經由數學的教材,

不只是教數學, 還順便培養成長中的孩子時時自省, 做事細心, 爲自己的錯誤負責, 即時改進的好習性, 相信這樣培養下來的孩子, 將來不管在什麼崗位做事, 一定是比較負責用心主動積極的, 如果你是中油的主管, 一定比較放心把工作交給這樣的人 (有感於最近中油工安事件不斷)。如果我們能在每一次數學考試過後, 教導學生不要只重視卷面上的分數, 更要重視分數背後的訊息, 是沒下功夫呢? 還是下了功夫但效果不好, 那就更要找出原因, 不然挫折感更重, 信心受到打擊。除了知道正確的解法, 還要翻開考卷背面的計算式找出自己的錯誤, 這才發現有的學生連計算式都找不到, 有的計算式書寫得龍飛鳳舞連自己也看不懂, 原來是一開始, 計算的空間很多, 就奢侈浪費, 龍飛鳳舞, 到後來不夠地方寫了, 就只好東寫一點西寫一點, 到最後找不到計算式, 答案都會抄錯。好好培養節儉整齊的習慣, 不要因爲計算過程不必給閱卷先生看就書寫凌亂, 還是應書寫題號, 整齊條理, 最好平常就養成這習慣, 於是紙張也不浪費, 有環保概念!! 一一審視寫整齊的計算過程, 常常會發現自己一些習慣性的錯誤, 例如0乘以1等於1, 13乘以4等於42,. . ., 找到原因了, 心裡很踏實, 不會有看到分數就淚眼汪汪, 考卷揉一團往抽屜一丟就沒事了的反應! 作爲數學教師, 亦爲人師, 給成長中的孩子影響多深遠啊!!

(二): 解題過程中, 進行變換時, 要求邏輯上等價充要的觀念非常薄弱;

$$\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad (A)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}}\right)^2=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \qquad (B)$$

但 $\Leftarrow$ 不成立,(B) 式只是 (A) 式的必然結果,(A) 的解必是 (B) 的解, 但 (B) 的解不一定滿足 (A), 故而把原式取代以兩邊平方的式子, 可能有增根, 不一定是同義等價充要的式子; 可以修改爲:

$$\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b-1<0 (\text{由 (A) 式得的先天條件}) \\ \left(\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}}\right)^2=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

這樣就不會有增根的問題了!

我們得在教學過程中, 藉著各種可能的題材, 融入並強調推演過程中講求邏輯上等價充要的觀念, 有必要時, 加上“ $\Rightarrow$ ”或“ $\Leftrightarrow$ ”的符號; 檢視教科書中的題材, 座標幾何, 圓錐曲線, 拋物線, 橢圓, 雙曲線標準式的推演過程中, 都是很好的引進並強調這個理念的機會。

附錄: 1995年大考中心預試試題:

1.若 $2.\overline{9}$ 表示無窮級數 $2+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots$ 之和, 則下列敘述那些是正確的?(多選)
(A)$2.\overline{9}<3$(B)$2.\overline{9}=3$ (C)$2.\overline{9}\le 3$(D)$2.\overline{9}$ 的整數部分是2(E) $2.\overline{9}$ 的整數部分是3
(預試結果: 答對率:2%, 選 (A) 者佔68% (D) 者74%) (答案爲:B,C,E)

2.關於方程式 $\frac{2x-1}{\sqrt{5(1+x^2)}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, 下列敘述何者正確?(多選)
(A) 無實根 (B) 恰有一實根 (C) 恰有二實根 (D) 其實根皆小於8 (E) 有一實根大於9
(預試結果: 答對率7%, 且高分答對率8%, 低分答對率8%) (答案爲:B,D)

—本文作者任教於省立新竹女中—

通識教育、科學教育與數學教育 (上)
—理性的叛逆與解放

黃武雄

"In the institute in Copenhagen, we used often to comfort ourselves with jokes, among them the old saying of the two kinds of truth. To the one kind belong statements so simple and clear that the opposite assertion obviously could not be defended. The other kind, the so-called "deep truths", are statements in which the opposite also contains "deep truth".

—Niels Bohr, "Discussion with Einstein"

引言

本文要從認知發展的角度, 去探討科學在通識教育中的定位。批判理論 (Critical Theory) 對於科學的工具理性與技術意識, 有深刻的批判。對於科學的研究計劃與其行政體系, 更有嚴厲的指控。法蘭克福學派, 不斷的在責難科學實證論的獨斷, 科學對人與自然的宰制, 以及它對現體制的維護。如果這些是科學的本質, 是科學唯一的面向, 那麼科學教育不是與通識教育為求得人自主與解放的目標相違背? 在第一節我們粗略介紹批判理論的這種觀點。

從這衝突點出發, 我們在第二節介紹有關通識教育的一些論述。在第三節中, 我們開始提出本文的主要論點之一, 說明人的認知發展中有整體性了解與分析性認識的兩種發展軌道。我們所謂的整體性了解不是曖昧神秘的直覺, 藉 Piaget 與 Chomsky 未有定論的爭議, 我們指出整體性了解與人類幼兒學習語言的關聯。這項解釋, 在本文作者的其他文章中有較詳細的論述[6]。用語言學習, 佐證整體性了解的動態運作及其本身的存在之後, 我們便著手探討工具理性此架構下的內函, 指出除科學 (以下皆專指自然科學) 之外, 社會科學與人文學的其他領域, 也有整體性了解與分析性認識。任何一個領域的知識, 若抽離了整體性了解, 尤其把分析性認識再加以化約為操作性訓練時, 必然只剩技術意識。科學如此, 法律、經濟、語言、文字訓詁亦然, 連詩詞歌賦也莫不如是。這是大學教育最大的困境, 也是通識教育眞正該做的事。人不會因為讀了荷馬史詩、莎士比亞, 懂了巴哈、克雷 (Paul Klee) 就有人文素養。其實人文素養蘊藏於人對世界 (自然、社會與人) 的整體性了解之中。科學裡頭

有人文素養, 文學藝術中亦有人文素養, 因爲知識便是人與世界的活動。科學在這種意義下, 可以視爲人與自然對話活動, 它不只含有 Habermas 所說的技術趣向, 也含有他所強調在人文學科中, 以語言爲特徵的實踐趣向, 及以批判爲特徵的解放趣向。在第四節中, 我們交代了這些, 並提出科學美麗與醜陋的兩個面向, 借用 Freeman Dyson 的話, 我們應該引領學生, 同時看到這兩個面向, 然後由學生自己去探察其美麗與醜陋。

在第五節, 我們再將前述的理論加以重申與補充, 然後回到實施通識教育, 在台灣現體制中的根本困難; 只有8個學分, Alas!

> Alas! 如果我們
> 有七色的夢　在飢寒的夜晚
> 那是因爲祂的恩賜;
> 祗有祂能佈施
> 美麗的彩虹　在風雨過後
> 黑暗來臨之前
>
> —beyond Treasury of Great Poems

一、批判理論對科學的批判

二十世紀三〇年代以來, 批判理論學派對於科學主義 (scientism) 之宰制現代資本主義社會, 提出嚴厲的批判。Max Horkheimer 指責孔德以來的科學實證論 (1) 把具有活動能力的人類看成機械決定中的事實與對象, (2) 只從呈現在直接經驗中的現象來理解世界, 未能區分本質與現象, (3) 在事實與價值之間, 設立了絕對的分界, 也因此把知識與人類趣向 (human interests) 隔離開來[3]。

Horkheimer 在他著名的一篇文章「對形而上學的最新攻擊」中, 寫道:

> 形而上學向人類提供一些無法以科學方法證實其存在的東西, 卻企圖以它們作爲未來的希望來餵養人類, 這當然是錯誤的; 但當科學自以爲是的, 認定自己是唯一的知識與理論時, 它本身便落爲它所蔑視的形而上學。
>
> 與今天人類能夠達到的知識水準來作比較, 科學所涵有的那部份"實在", 不論就廣度或深度, 都是有限的。正如通不過實驗檢證的科學結果不能成立一樣, 只用科學語言思考與表達, 是膚淺而偏狹的[9]。

而在「啓蒙的辨證」中, Horkheimer 的批判逐漸深化。他批判的重點, 已經不只在於反對把科學主義當做科學哲學, 而直接責難科學及技術本身。批判科技注入在資本主義社會中的「技術意識」(technological conciousness) 及「工具理性」(instrumental reason)。尤其對於工具理性的批判, 成爲法蘭克福學派對科技最切中要害的批判。六〇年代青年反叛哲學的貢獻者 Herbert Marcuse 進一步指出:

> 自然科學認爲自然含有潛在的工具性 (potential instrumentality)。在這種科技的先驗觀念之下發展, 一旦對自然的改造包涵了對人的改造, 一旦人造的產物出自而且返回社會, 則科技的先驗 (technological à priori) 便成爲政治的先驗 (political à priori)。最後技術理性是在維護 (統治階級) 宰制社會的合法性, 而不是在取消其合法性[11]。

Tom Bottomore 解釋道:

> 由科學與理性的行政系統所產生的體制, 有它內在的邏輯。這一內在邏輯能在個人或特殊的社會群體背後, 自己運作起來。而且這一情形可以出現在任何一種型態的現代社會之中—不論資本主義、社會主義、極權主義或民主主義的社會之中[4]。

Marcuse則又說明:

> 不但科技的應用, 而且科技本身, 都是對自然與人的宰制。這種宰制包含方法性、科學性、數量性以及數量的控制效果。而宰制的目的與趣向, 並不是「後來」才從外面附加於科技之上的, 而是科技在建構它自己的內容之初, 便已經進駐其自身。

到寫「工業化與資本主義」時, 他更直截了當的說:

> 科技往往是一個歷史的與社會的計劃 (a historicalsocial project)。在那裡頭一個社會及其趣向的主線, 如何面對人與事物, 也落在計劃之中[11]。

法蘭克福學派晚期的代表人 Jürgen Habermas, 乾脆重建知識論, 把知識根據人類趣向, 劃分成三類[8]。將科學知識及方法歸之於其中第一類: 即根據物質需求而勞動發明的所謂「技術趣向」(technical interests)。這一趣向的知識特徵爲「經驗與分析」(empirical-analytic)。

Habermas 所分類的三類知識形式, 對應於社會生活的三種基本特質, 即勞動 (labour), 互動 (interaction) 及宰制 (domination)。由互動產生的知識爲其第二類: 即根據人類語言與溝通的實踐趣向 (practical interests) 所構成的歷史與解釋 (historical-hermeneutic) 的知識領域。

而第三類知識則爲源自社會階級與人的宰制及被宰制的解放趣向 (emancipatory interests) 所構成的反省與批判的知識領域。

在這種知識分類之下, Habermas 把 (自然) 科學局限於單純技術趣向下的知識, 從而與人文學、社會科學等其他領域的知識分隔開來, 把十九世紀孔德、斯賓塞以迄維也納學派統一科學 (unified science) 的科學實證論或科學主義壓縮於一個角落, 也把科學貶抑於技術探索與物質需求的層次。

二、通識教育的意義

在通識教育中討論科學教育, 不得不面對像批判理論學派所提的批判科學的觀點。二十世紀的科學如果只是局限於物質需求下衍生的技術, 一如 Habermas 所言, 那麼科學教育應該排除在通識教育的課程之外, 而歸併於職業或專業教育。

又如果科學灌輸給社會的, 果眞像 Horkheimer 與 Marcuse 所說, 是工具理性與技術意識, 而且一味在維護社會宰制的合法性, 加深人在威權與經濟控制中的束縛, 那麼科學教育不只是應該排除在通識教育之外, 而且科學教育的本質, 便違反了實施通識教育以達成人的自我且全面解放的目標。

面對批判理論的批判觀點, 我們將採取辯證的分析方法, 來探討科學與科學教育在通識教育中的位置。例如, 我們不能無視於事實, 否認工具理性與技術意識的存在及其影響。可是我們將探討其來源。同時也將指出科學的其他有利於人的自主與解放的趣向, 指出 Habermas 的偏見。事實上科學也是一種語言, 是人與自然對話的語言, 它是實踐趣向下的產物, 甚至也兼含解放趣向。

在做此分析之前, 我們須先回來論述通識教育的意涵, 才能定好科學教育在其中的位置。

Howard Lee Nostrand 在替 Jose Ortega y Gasset 所著「Mission of the University」(1946) 一書作序時, 說:

> 通識教育意指人的全面發展, 而這種全面發展是在專業訓練之外的。它包含了把人的生活目標用文化來充實 (civilizing of life purposes), 把人的情感反映加以細緻化 (refining of emotional reactions), 也包含了使人對事物的理解趨於成熟, 而這理解卻應該依據當代最佳的知識。

John Buchan 的看法, 則另有旨趣:

> 我們生活在一個令人沮喪而混亂的世界。這是一個沒有人能夠預見其未來的世界, 也是一個基礎已經動搖的世界。在這個世界裡, 我們曾經替它命名爲文明的諧和已經陷入嚴重的危機。生在這種時代, 受過通識教育的人應該如何面對這種世局? 設若教育不能在此一時刻給予我們一點引導, 那麼教育又做什麼用?[1]。

Nostrand 與 Buchan 的看法, 多少已經指出通識教育的方向, 不限於專業訓練, 而是爲了要培養人全面觀照的能力, 以應付生活中的變局, 參與建立世界的新秩序。Buchan 更指出通識教育 (liberal education) 應賦以人三種品格: humility, humanity 與 humor。爲什麼成功的通識教育會帶來人的謙遜? 因爲:「如果我們是受過良好教育的人, 我們必然走過人類思想的寶庫, 我們當然不可能太高估自己, 一心想爲自己手上的工作爭取回報, 而奢求太多」。至於人性化, 他說:「我們需要一種對人的本性深度的尊重, 在那些用國家機器來抹煞個性, 使每

個人都變得沒有臉孔的人身上, 是沒有這種尊重的」[1]。在這樣的意味下, 通識教育薰陶人品格的方式, 不僅僅透過個人的生活教育, 而是進一步與人類文化、政治、社會、歷史的大領域溶合, 在這種知性的溶合中培育人格。而關於爲什麼要有幽默, Buchan 的回答是:

> 在今天這樣的年頭, 當宗教的繩結, 叫人憂傷的已經鬆解, 空隙中出現了一些大眾領袖, 他們把自己抬高到聖者的地位, 把自己膚淺的言語當做神聖的福音。面對這類愚蠢, 我們唯有用笑來回答。

Buchan 寫這些話的時間是 1938年, 正値納粹氣焰高張之時。但他的感嘆則迴溯於西方自雅典時期以來, 歷經中世紀教會一直實施的博雅教育的傳統。西方博雅教育 (liberal education) 事實上是菁英教育。在古希臘, 博雅教育對象更僅限於「自由人」, 不包含工匠與奴隸[17][2]。這種教育計劃的來源, 較具規模的應始於柏拉圖。柏式教育分: 初級部: 含體操、音樂實習與學習字母, 與高級部: 含算術、幾何、音樂原理與天文學。經過希臘末期 sophists 哲學的影響, 到了基督紀元已分成: 文法 (Grammatica)、修辭 (Rhetorica) 與辯學 (Dialectica) 的三支 (trivium), 加上幾何 (Geometrica)、算術 (Arithemtica) 和聲學 (Harmonia) 與天文學 (Astronomia) 的四支 (quadrivium), 加起來, 合稱爲七通藝 (seven liberal arts)。

與中國「禮樂射御書數」的儒家教育相比較, 西方博雅教育顯然多出理性教育的部份。這一部份表現在柏拉圖計劃中的「幾何」。當時的幾何學所傳授的主要是 Euclid「幾何原本」(The Elements) 的內容。「原本」呈現的是西方古代數學思想的總結, 卻以超越其它各民族文明的公理系統來表達。同時理性教育也表現在 sophists (詭辯學派) 所注入的「辯學」(Dialectica)。

但西方博雅教育與中國儒家教育共通之處, 則爲施教的對象都是少數的社會菁英, 基本上都是貴族教育。統治階級要代代傳承的, 不只是生產技術, 也要有典雅的言行, 鑑賞音樂與運用文字的能力[17]。

經過十九世紀末與二十世紀前葉, 工業革命、社會主義運動以及納粹主義的橫行, 人類社會承受到世紀的動盪, Buchan 的感慨成爲古典菁英教育最後回音。二次大戰後期, 美國 Educational Policies Commission 報告, 提出 “Education for All American Youth” (1994), 強調拓廣視野的文化素養教育, 應擴及所有青年, 而不是把平民學生當做技術人員與生產工具來培養。EPC 的許多教育觀點源自杜威的教育哲學, 而帶來了進步的氣象。與 EPC 報告相呼應的, 有 Harvard 同年 (1944) 的報告 “Education in a Free Society”[7]。

在冷戰期間, 這樣的進步觀點沉寂了一段時日。七十年代之後 Harvard 的文理學院院長 Henry Rosovsky 接掌哈佛通識教育核心課程的規劃, 發動了一場較大的大學教育改育。他對於通識教育的基本看法是: 一個受過教育的人,

(1) 應當能明晰流暢的思想與表達;

(2) 對於人類求取知識, 理解自然, 社會與自己的方法, 應當有批判性的鑑賞力;

(3) 處在二十世紀末期, 已不能像以前西方的知識份子一樣還偏執於西方自我中心的意識與思維, 而應當了解其他分支的人類文化, 了解其他的時代;

(4) 對於道德性的與倫理性的價值問題, 應當有些理解, 也有思考它們的一些經驗;

(5) 對於某些領域的知識, 應當有深入的解與研究[15]。

這樣的看法, 使構成 Harvard 核心課程的基礎, 把如何達成 Nostrand 所說追求「人全面發展」的目標, 進一步具體化; 把柏拉圖以來的博雅教育平民化; 也把 Buchan 一心想使人「透過通識教育如何面對世界與生活中的變局」的企圖, 加以現代化。事實上 Rosovsky 的看法透露了強烈的西方自由主義的精神。他強調: 方法、批判與吸取異民族的文化, 對於道德與人格教育, 他沒有忽略, 但並沒有要讓教師扮演起教導學生人格與道德的主導地位。相反的學生仍然是主體, 教育者只提供學習與討論的環境, 讓學生「有些理解」, 也「有些思考」道德與倫理問題的經驗。

三、從認知發展看通識教育

從 Rosovsky 的基本看法中, 看不出爲何通識教育中, 不能排除科學教育, 至少他沒有給出較深刻的理由。Rosovsky 本人是經濟學家, 一方面他認爲科學是人類獲取知識的重要方法, 另一方面由於現代生活中脫離不開科學, 一般人不能不了解科學, 同時也對科學如何與社會發生關係: 例如核子武器與遺傳工程等這類攸關人類共同命運的問題, 參與抉擇。這種觀點是一般通俗的觀點。

反對 EPC report 的 Morris Shamo[16], 則認爲「透過理解科學, 學生最能夠學得美學與知性價值」。這是有趣的觀點, 這點在後文我們要再回來探討。(待續)

不管是 Rosovsky 或 Shamo 都把科學當做知識的一個可以抽離或割裂的部門。這類觀點比較無法突顯出, 在通識教育中知識應視爲一整體的精神。

主張「知識爲一整體」最力的是 Krishnanmurti[10], 他認爲人之了解世界, 是把世界作一整體看待。只有這樣, 人的心靈才能平靜。他認爲教育的目的, 便是要去除人的恐懼, 使人自在。而分割的知識, 卻造成人的恐懼, 沒有對世界整體了解的專業教育, 激發的是人擁有外在利益的欲望, 與人擔心失去它的恐懼, 這是世間紛擾的根源。

Krishnanmurti 的觀點, 源於宗教精神對物質文明的批判, 有它令人深思的涵義。可是亦由於這種對物質文的反動, 使 Krishnanumrti 到了晚年, 完全陷入神秘主義的深淵。

本文不從 Krishnamurti 的看法, 去強調「知識爲一整體」的觀點。卻改從認知發展去建立知識的整體性。又由於每一個人都曾經是小孩, 如果把通識教育定位於小孩整體認識世界的延伸與發展, 那麼通識教育便也施用於每一個人, 擺脫了貴族式博雅教育的格局。

同時, 本文也將一步步回應前兩節所提出的問題。我們先簡扼的提出幾個關鍵性的論點[6]:

(一) 人的幼兒所面對的世界是整體的, 這世界的內容是: 自然、社會與個人。這三部門對他來說是一體的。如果把現有的知識分成相應的三個主要領域: 自然科學、社會科學與人文學, 那麼對小孩來說, 這三個領域原本是一個整體。直到長大之後, 由於專業分工的需要, 也由於教學上的方便及教師本身專業訓練的限制, 小孩才慢慢意識到各領域之間的分野, 且更進一步也隨著選擇自己的專業或職業。

人對世界整體了解的特徵, 尤其顯現在幼年的兒童身上。人的認知發展是雙軌的: 一爲進入文明的軌道, 它的脈絡, 基本上是依循 Piaget 的發展階段理論, 由具體而抽象, 由特殊而普遍, 由簡單而繁複: 另一則爲自然能力的軌道, 兒童擅於辨認事物的整體特徵, 對週遭世界的理解是整體的。所有知識都有利於他的生存, 因此對於知識他沒有偏見, 也沒有挑食的排斥其中的某一部門。對於天地萬物, 人世風情, 他無一不好奇。而且他認識世界的方式是訴諸直接的體驗。複雜詭譎, 富於變化, 最適合幼兒整體性的理解。在自然能力的軌道上, 人的認識一開始便是尺度空間 (metric), 是三維或更高維 (high dimensions), 具體、特殊、複雜、多變是它的主軸。只有在文明能力的軌道上, Piaget 從拓樸而尺度, 從一維、二維, 才三維、高維的觀察, 才是對的。

(二) Chomsky 與 Piaget 爭論的焦點, 在於兒童如何在三歲之前, 還處於 Piaget 前操作期的幼稚階段時, 便學會一套複雜的語言? 語言據 Chomsky 是遠比一般人所想像的還複雜, 本身還潛藏著所謂「深層結構」(deep structure)。一個小孩連一、二、三的數目意義, 都混沌無知的時候, 怎麼能駕馭且運用一套語言, 說出一口精確流利的母語? Chomsky 因此把語言能力歸之於人類這一物種早經演化完成的遺傳程式, 認爲人天生便有語言的普同設計 (universal device), 就像許多鳥類生來便會築巢一樣。

Piaget 當然不同意這種說法, 那麼問題出在哪裡?

問題似乎可以拉回到兒童有掌握整體特徵的自然能力, 這一件事上面。幼兒可以很快把他 (她) 所聽到的語音串 (sequence of sounds) 與那一刻的情境關連起來, 掌握到情境的整體特徵, 然後用成套 (package) 與取代 (substitution) 的方法來學得語言。這過程須輔以不斷的嘗試錯誤[6]。至於成人學習新的語言, 所用的方法則爲分析 (analysis) 與組合 (combination)。兩相比較, 幼兒學習語言的整體性方法, 比起成人的分析性方法, 遠爲優越。後者屬文明能力, 是符合 Piaget 的軌道發展起來的: 前者則屬自然能

力, 是人天生擁有的能力。語言能力只是自然能力高度表現出來的一環。

(三) 文明能力是分析性的, 爲人類發展文明最重要的手段。從具體中抽象, 在特殊中尋找普遍, 透過微觀追求規律, 復以組合去拼湊宏觀。科學連同人的文明是這樣建立起來的。但嚴謹的分析訓練中, 人時常失去了整體觀, 失去了創造與浪漫。整體並不等於部份的總和。

自然能力則是整體性的, 是人創造力的基礎。尤其是文學藝術的源泉。在語言學習上, 整體性方法遠比分析性方法優越。但如果不借助分析, 人無法從鳥類的飛翔中找到飛行原理, 製造出飛機, 人進不了分子原子與粒子的世界, 人永遠不知道 DNA 如何在左右自己的生物性行爲, 不知道能量可以轉換, 也無法探討哲學, 無法建立起近代世界中, 以理性爲基礎的法律、政體與典章制度。

通識教育與其說是在調和「科技」與「人文」兩種文化間的對立, 不如說如何在經驗的拓廣上, 維持「自然」與「文明」這兩種能力同時保留在人的身上, 使人在兩方面都有較健全的發展。

(四) 在人的認知發展上, 早期運用的是整體性的自然能力。這種認識世界的方式, 帶著好奇, 體驗與沒有偏見的態度, 使人的幼兒能在幾年之內從不及於蚯蚓、螞蟻的智力水準, 發展到人類智力的水平。說得出一口流利的母語, 甚至微妙的避免了父母的語法錯誤。這段時期, 幼兒的學習特點是整體的, 不斷嘗試錯誤的, 與成套的, 同時也是最具創造性的學習, 因爲他所面對的是對他完全陌生而且處處是陷阱的世界。如果允許把人個體的心智發生 (genesis) 史與人類物種的演化史來作某一程度的比擬時, 我們可以看到原始部落族人有著一些相同的特點[6]。

事實上, 幼兒在發展與運用自然能力的同時, 也同時在發展他的文明能力。關鍵在於它如何逐步脫離天生認知上的自我中心, 從別人的角度或其他不同的觀點去看世界。循此發展下去, 開始認識「不變性」(invariants), 從而建立起客體世界與普遍規律的觀念, 也因而從具體進入抽象, 從整體進入分析。這便也步了 Piaget 的軌道。

但當教育過份強調分析性學習的時候, 人的創造力會衰竭。這是因爲早年整體性的自然能力消失的緣故。一個研究所的學生, 也許很擅於從事操作性的專業工作。但做研究時, 卻無法面對變化或生疏情況, 而想出因應的對策, 或從更宏觀的角度重新檢討問題的提出 (formulation) 是否恰當。這種現象, 常與整體性的自然能力, 在過度、或重複、或規格化的分析性訓練之後, 早已消失有關。

(五)「工具理性」事實上也是這種情況下的產物。「工具理性」不僅僅在科技訓練中發生, 也在狹隘的法律或管理的專訓練中發生。固然工業革命之後, 百年之間科技飛達, 催生了超大企業的組織, 也使人類生活在工商體系的宰制下, 逐漸單元化, 衣食語言皆失去原有地域與族群的特性; 固然科技訓練中蘊藏著工具理性的灌輸, 但工具理性的根源還是來自壓抑整體性的理解, 只側重分析性訓練的一種工商價值與教育制度。

換句話說, 科學中的「概念理性」倘若抽掉對世界整體性的理解, 很容易淪爲

Habermas 所稱第一種純技術與物質趣向的奴隸, 變成「工具理性」。

(六) 通識教育的意義, 是使人在靈活而交迭的運用「整體—創造的自然能力」及「分析—抽象的文明能力」的基礎上, 打開人的知識視野, 拓廣人的經驗網絡, 以求得知性的成熟, 再由人本身將知性的成熟, 過渡成人格的成熟。

Rosovsky 講過一句重要的話:「受教育與未受教育者, 最關鍵的差別便是一個人的生活經驗是否足夠拓廣」。他提出這見解, 爲的是要強調在通識教育中接觸異民族文化的重要。可惜他未曾進一步引申, 去發展此一見解。

事實上, 以人本主義者的觀點來看, 人對知識的認知, 不過體現爲人的經網絡。未受教育者的經驗網絡或許非常牢實, 但卻狹窄, 因爲他得來的每一件知識都透過他自身的觀察思索與體驗, 可是他的世界終究只限於他生活的範圍。

另一方面, 受教育者的經驗網絡或許較大, 卻可能鬆散。因爲他可能被灌輸許多不同時空下知識, 認識幾個世代前人名及其事跡, 熟悉幾千里外發生的事件及其始末。可是這些增加的見聞, 並沒有透過體驗、思辯與批判, 沒有與自己切身的生活經驗相互印證, 所以他的經驗網絡, 大而鬆散。

太狹窄或大而鬆散的經驗網絡, 都無法促發人的知性成熟。受教育者, 在受教育的過程中, 如果很快便由特殊跳入普遍, 由具體躍進抽象, 沒有經過直接體驗, 又未經印證消化, 他的經驗網絡會處處呈現斷層。未經批判、思考以決定取捨的普遍原理與規律, 不論屬於科學或人文, 都會使人在知識中異化。

通識教育不是要拉大一張張鬆散的經驗網絡, 增添無法消化的知識。正好相反, 通識教育要做是透過各個知識領域批判性的思辯, 相互印證, 觸類旁通, 去填補經驗的斷層, 去發展成熟的知性。

至於人格教育, 不應該直接教導。依靠外加的教誨, 無法培養出成熟與自主的人格。尤其在大學, 教育者沒有也不應該去負起人格教育的直接任務。人格的成熟要由知性成熟去過渡而完成。在東方專制文化仍然宰制著衆人思想的東方社會, 讓通識教育直接去擔負起人格教育的工作, 會扭曲通識教育的目的。

(七) 通識教育不是要表面的全面化, 不是要道德化, 也不是要膚淺化, 庸俗化。人對於知識的兩三分支, 有忘情的投入與深入研究的經驗, 才能領悟創新與工作的意義, 才能溶入人類文明的艱鉅創造中, 也才能深刻體會知識的內涵, 而趨於成熟。又由於這個緣故, 通識教育與專業教育並非對立。相反的, 兩者是相輔相成的。

同時通識教育本身並非概論式的教育, 也非止於一般性的介紹。對於散置在不同領域的點做深入的了解, 可以促發學習者本身, 自己將知識聯結成線或面。在哈佛的核心課中, 像「法國文學中以幽默呈現的社會批判」、「非洲資本主義的出現」、「浪漫主義與視覺藝術」、「悲劇與人類衝突」、「蘇聯革命」、「自主與異化」等皆爲典型的通識科目。在科

學方面, 「機率、必然性與秩序」、「運動、動力學與能量」、「變動中地球」、「宇宙中的物質 (matter)」、「演化論」、「能源與環境」 等課程, 也透過特殊深入的論題, 去談論自然界的普遍原理。在哈佛核心課程的說明中, 有一段關於科學核心課程的話:

> 這些課程不只談論科學家所相信的事實, 也探討這些事實如何被發覺被承認, 如何因此建立起科學的法則與原理。此一過程中, 觀察與實驗的批判性角色, 將要被強調。

在通識教育的科學課程中, 強調科學知識的發展、批判、整體性創造與自我修正的面向, 將有助於消除科學分析性訓練所帶來的工具理性的影響。事實上, 這些被人忽略的面向, 才是科學的精神。

(八) Caleb Nelson 曾就此核心課程, 抨擊哈佛的改革。Nelson 從哈佛核心課程科目表中, 自六個領域中各取一二較偏窄的科目, 如從外國文化中取「十六世紀幕府政治」, 從歷史中取「中古歐洲的權力與社會」等列出一張科目清單, 指責哈佛學生所受的教育偏頗不全。事實上, Nelson 沒有注意到核心課程只佔去學生一至二年的時間, 其他時間仍有選修與主修科目的要求。到底全面的灌輸所有領域當代的精華知識比較有教育效果, 還是由點、線、面去學習, 其實是他們爭論的焦點。

四、 科學作為通識教育的一個領域

人的幼兒出生之後, 環繞於他週遭的世界是自然、社會與個人。小孩對日月雲雨、蟲魚鳥獸的好奇與親近, 有益於他對周遭世界的認識, 也有助於他的生存。人類作爲地球上的一個物種來說, 也是這樣。好奇且親近自然, 與自然對話, 從自然中學到是非曲直, 同時利用自然的蘊藏, 發展生產技術, 使自己與整個物種存活並發達起來。這便是科學的活動。

(一) 科學不單單是只有 Habermas 所批評的技術趣向, 科學其實也是人與自然對話的活動, 它具有語言的形式與實質, 滿足了 Chomsky 對語言的定義。只是這時由人與自然對話的語言延伸到科學社群內部與對外之間的語言。像 Chomsky 把人文語言當作一個由語音串對應到意義 (meanings) 的函數, 科學的自然語言亦從科學符與號語彙對應到意義。人文語言中的語法結構, 則相應於自然語言中的方程或自然規律所界定的運算一陳述的結構, 同時科學的自然語言, 也有人文語言串溝通 (communication) 與解釋 (hermeneutic) 的功能。關於人文語言會有深層結構出現, 源自下列幾個原因:

(1) Chomsky 的語言函數的定義太過簡略。把語言函數的定義域視爲語音串的集合, 其實太簡化語言。每一個語音串皆有它的屬性。如同樣是名詞, cannibals 表人, midnight 表時間, 略掉這些屬性, 便使得語意變得曖昧。因問題表述 (formulation) 的曖昧, 而歸之於人先天有辨識語

意的深層結構, 是不恰當的, 事實上語言不是單一的函數, 而是一串函數的合成 (composition of function; iteration of functions)。

(2) 人認識世界與運用文字材料的方式, 依賴於整體與分析的兩種能力。語法結構 (Grammer) 屬於分析。但整體性的直覺先於分析形式。後者夠用而不至引起混淆時, 就不一定要再訴諸分析的形式去加以區別。深層結構其實便是這種整體性的直覺。所以, Chomsky 所訝異的深層結構, 其實便是這種整體性的直覺, 這種直覺是基於人秉乎自然的一種辨認整體特徵的能力。科學, 作爲自然語言來說, 當然也有這種整體性的直覺。這種整體性直覺, 在運用自然語言的科學社群中, 潛藏於其中少數或多數人的身上。有些時候只限於 Einstein, Bohr 及 Poincare 這小圈子的人物, 有些時候則普及於科學大衆。

(二) 科學的研究, 不單單是實驗、觀察、歸納、演繹的分析性過程或操作性工作。Root-Bernstein 在「科學中的藝術」一文存[14] 提到:

> 一般人認爲科學家只是邏輯問答中的機器, 他們作經驗的觀察, 提出並檢證假說, 然後簡潔地導出解答。有人或許要說: 科學便是要消除個人的, 直覺的或是主觀的預設, 使世界的客觀分析不致受到干擾。但這種對科學的印象, 其實是因科學的直觀必須要表達與溝通, (只好訴諸科學的符號、方程及語言) 所造成的結果, 可是這中間卻擦拭了科學研究的眞實過程。

事實上, 科學研究中重要的是整體的敏感與創造。科學研究者時常會有一種經驗: 陷在符號、方程式的計算中, 一無所得。如果一直待在那分析的叢林中, 檢查、思考與徘徊, 人將困頓萎縮。這時候退回一步, 讓整體的感覺慢慢升起, 或許會有偶然的亮光閃過, 問題便豁然開朗了, 或至少人已走出那叢林。叢林中的所有細節一剎那也都清楚其輕重。換句話說, 分析的困頓被整體的直覺解決了。Shamo 談科學中的美學時, 強調「科學的理解, 最能使人學到美學與知性的價值」指的便是科學研究的一連串創造活動, 使自然界蘊涵的最美麗的結構展現, 使人在與自然的對話中, 表露了獨特的手法、語言與詮釋。而這正是文學藝術的本質。只是科學研究受自然的制約, 游走在自然所界定的邊緣, 人要發揮最大的想像力與創造力, 才能把人類理解自然的已知疆域往外拓展。

Root-Bernstein 在前述的文章[14]中, 收集了許多著名科學家對科學創造的親身經驗, 所作第一手的描述。Root Bernstein 指出「最好的科學, 源於分析心智與美學敏感的結合, 對這一結合我們或可以稱之爲 sensual science, 教育者應該授與學生的便是科學的這種帶著人主體色彩的面向」。

歷史上一長系列的科學家, Euclid, Archimedes, 祖沖之, Fermat, Newton,

Laplace, Gauss, Bohr, Einstein, Gödel, Cartan, Weyl, Poincarè, Smale, Griffith, Feyman 等人的研究與他們認識世界的態度, 無一不具有他們個人的風格。他們每個人在研究工作風格上的獨特性, 與巴哈、莫札特、梵谷、貝多芬、克雷、畢卡索從他作品所散發出來的, 並無二致。

(三) 由於科學是人與自然對話的活動。自然本身雖然奧秘詭譎, 但它在複雜豐富的演化脈絡之中, 蘊涵一種叫人驚歎的一致性 (consistency)。人的理性孕育於自然, 人在自然中生活, 從自然的回應中建立是非。古代的傳說與近世的歷史不斷的揭示一條普世的原則: 大自然的規律, 不因王候將相的意志而轉移。從人的社會組織逐漸嚴密之後, 統治者的威權便也隨之樹立在人之上。統治者的神話, 時常蒙蔽自然的是非。科學社群在統治者餵養之餘, 會對神話質疑。在這意義下, 科學會具有批判反省的解放趣向。伽俐略被判刑之後所說:「可是地球確實在轉啊!」的名句, 標誌著科學社群對威權的抗爭, 這是科學的本質使然。

(四) 科學的解放趣向, 表現於啓蒙時期的概念理性。盧梭「論人類不平等的起源」、伏爾泰「論容忍」及狄德羅的百科全書, 對教會與君王的專制逐步崩解, 有正面作用。即使在孔德的實證論之後, 科學的重要結果, 進化論、非歐幾何、或然率論、測不準原則、不可辨僞的數學敍述 (Gödel)、相對論、混沌理論等, 皆對 Laplace 的古典決定論, 對絕對眞理以及先驗的上帝信仰提出質疑, 使人的思想逐步解放。另一方面科技發達之後, 生產力大幅提高, 才促使個人從封建的生產體制中釋放出來, 間接激發人道主義、自由主義甚至女性主義的興起。Bertrand Russel 對科學的解放趣向, 作過細緻的探討。關於思想方面的解放, 在 "The Impact of Science on Society" 一書中, 他指出因爲科學的興起, 使人類慢慢相信自身的觀察重於世俗的權威, 使人類對自然世界的理解首次得以自主, 使人類捨棄了亞里斯多德的目的論, 也使人類知道本身在宇宙中的定位。而談到生產力對人生活的解放時, 他指出在英格蘭即使到十九世紀末期,

> 兒童一天工作十二到十七小時, 他們常在六歲或七歲便開始工作。爲了不讓他們因疲困而「怠惰」, 他們時常被鞭打, 儘管如此, 許多兒童仍因工作過度, 瞌睡而掉落機器中, 斷肢殘癈或因而死亡。父母明知這種慘劇的威脅, 也不得已送子女去工作, 因爲他們自己生活在悲慘的絕望之中。[13]。

這段描述是工業革命之後, 生產力尙未大幅提高時的情景。而在這時期之前, 瘟疫、貧困、飢餓、死亡隨時在威脅著人類的生存, 許多原始部落的民族, 一家八個小孩, 夭折五六個是常有的事。在工業革命之前, 歐洲婦女因生產而死亡的比率, 遠比今日高過十倍以上。

事實上在物質條件方面, 技術趣向的發展使生產力大幅提高, 也含有解放趣向的功能。至於工業革命之後, 人自身在生產線上

異化, 被一波波的商品吞噬掉自主性, 則又是二十世紀的「後現代」問題。

(五) 前述的說明, 我們企圖在指出: 科學事實上不像 Habermas 所說那樣, 只限於物質需求下的技術趣向。科學亦具有以語言爲特徵的溝通趣向, 也具有反省批判的解放趣向。這是科學原有的面目, 也是科學美麗純潔的一面。在通識教育中, 我們應引領學生看到科學這美麗純潔的一面, 甚至看到科學創造的美學內涵。

但是我們也能不揭示科學醜陋的其他面向。Marcuse 認爲「科技本身在建構它自己內容之初, 便把其宰制自然與人的目的與趣向, 一起進駐科技自身。」這樣的批評, 至少在科技與帝國主義, 與獨裁政權, 與集體主義, 或與資本主義的經濟體制相結合的時候, 是千眞萬確的。十九世紀之後, 科技從伽俐略時代思想解放者的角色, 從盧梭啓蒙時期人道主義的塑像, 搖身一變, 變成了宰制者的角色。

Freeman Dyson 有一段關於科學與教育的話, 說得平易感人:

> 年輕的這一世代有三個很好的理由, 叫他們轉身走開, 把科學丟在他們身後。他們所目睹的科學, 是僵化威權的紀律, 與企業及營利的目的掛勾, 又儘在幫忙製造集體殺人的武器。這三個恨科學的理由, 是眞實而嚴肅的。對我們的小孩假裝科學沒有這三個醜陋面, 是沒用的。我們騙不了小孩。作爲教育者, 我們該做的是告訴他們, 科學是一座六面山, 醜陋的三面之外, 還有美麗的三面: 對威權的顚覆, 有藝術的姿顏, 而且跨越國界人類一家, 要吸引青年進入科學領域, 只有讓他們看到科學這所有的六個面, 而給他們完全的自由, 去探察它的美麗與醜陋。[5]。

五、從理論到現實

今天通識教育的呼聲, 固然是來自長久以來的大學專業分科教育所造成的流弊, 需要面對且積極改進的龐大壓力。但通識教育的意涵, 似乎遠比調和「科學」與「人文」兩種文化的對立, 還要深刻。我們無法相信學科學的人去修些莎士比亞、巴哈、托爾斯泰或紅樓夢, 便會有人文素養, 我們也很難相信學人文的學生去修些物理化學概論的課, 便理解科學的精神。但是我們相信這是起碼該跨出的第一步, 至少要打開眼前狹隘的分科職業訓練的格局, 去接觸其他領域中一些較深刻的感悟或思潮。

這就像小孩接觸他周遭的自然、社會與個人一樣, 三種領域對他來說是一個整體, 也許他常看到蝸牛、蝴蝶, 看不到熊與水獺, 也許他住的是小鎭, 從不知大都會的人怎麼生活, 但自然與人文對他來說, 是整體的。牆角的蝸牛, 小鎭的風情與母親, 這是一體的, 是他生活的世界, 是不能相互分割的。

但打開學生的知識視野, 並不是要灌輸或單向的介紹各領域的知識。我們不是要每

一個學生走過每一扇知識的大門, 我們只是要他不致太早便關在一個小房間裡, 在計算他的出路; 只是要他像兒時的情景一樣, 同時喜愛自然、社會與人, 每一領域總有一兩道門他有相當深入的涉獵。他不是要懂得所有的東西。我們只希望有一天他想懂什麼東西的時候, 他知道怎麼去弄懂, 然後可以眞的弄懂, 這便是知性的成熟。也就是說, 我們希望透過打開學生的知識視野, 去促發他知性的成熟。

人可以依靠浸淫在某一領域中, 深度的投入與耕耘, 達成相當程度的知性成熟。科學中有分析性訓練, 也有整體性的創造, (台灣的科學教育最大的問題是, 連分析性訓練都降格爲操作性訓練, 這使得工具理性更露骨地淹沒了科學工作者的思維。) 科學不只是技術、原理、也有直觀與意義, 有對話與風格, 甚至有它的美學與哲學。如果一個人浸淫科學, 能從其分析性訓練到整體性創造, 從技術面到科學本身的哲學 (指其內在的反省, 不限於時下外造的「科學哲學」) 都有所領悟, 那麼, 他同樣會達到一定的知性成熟, 會取得一定的人文素養—因爲科學事實上是人與自然對話的活動, 本身自然有人文的意涵。

與科學相仿, 人文中有整體性的創造, 也有分析性的訓練, 文學藝術中固然有體驗, 感悟與文化作爲創作的背景, 但同時也有文字或手法上的技術, 甚至還有結構與理性。終生浸淫文學藝術, 也可以取得一定的知性成熟。

但以人類取得知識與創造作品的方法來說, 幾個主要領域, 各有旨趣與特色。連結幾個領域中的一些較深刻的題材, 會拓展人的知性驗, 靈活人的心智, 更催化進一步的知性成熟。

科學的分析性訓練, 尤其陷於其操作性訓練或陷於其組織性的研究計劃之中時, 工具理性與技術意識會抬頭, 使科學工作者變成了宰制者, 而協同「維護宰制社會的合法性」(Marcuse[11]), 使科學工作者從人類的解放趣向中分離出來, 變成維護宰制體制的工具。

這是因爲前述科學整體性理解的成分, 在科學的認識與研究中被抽除。同樣的技術意識 (與工具理性) 也可能出現在法律、經濟、社會學與政治學的社會科學領域之中。一個不從整體性理解, 去研究法律的人, 時常會落入條文的陷阱, 致使從法律的訓練中產生技術意識與類似於科學操作與組織中的工具理性。

文學藝術, 亦無例外。人文素養無法從文法、修辭學、拉丁文、八股、或訓詁學中的分析性訓練中得到。連詩詞歌賦, 如果剝離其整體性的了解, 所剩的也只是技術意識。

無疑的, 各門知識領域的技術或分析方法, 是知識的骨架。但沒有血肉, 沒有整體性的了解, 該一領域便只製造出技術意識。(自然) 科學中的理性, 便在這樣的脈絡裡, 從伽俐略變成泰勒, 從概念理性萎縮爲工具理性, 也因此使理性背棄了它叛逆與解放的傳統。

可是這樣的現象, 也發生在其他任何領域, 使得技術意識變成所有知識工作者身上共有的標誌。今日談通識教育, 不是要知識份子迴溯於過去博雅教育中, 去裝飾起典雅

的言行與鑑賞古典文學藝術的品味, 而認同於統治階級; 也不是要使知識份子變成勞動力的一部份, 變成了國家社會的工具, 使他失去了對世界的整體了解, 而只剩技術意識, 留存在他的身上。

正好相反, 通識教育是要透過多樣知識領域的深度涉獵, 去回復人對世界的整體了解, 使他拓廣他的經驗網絡, 促發的他的知性成熟, 或更進一步說, 從知性成熟過渡到人格成熟, 使人得到解放—但注意是由他自己去過渡, 由他自己去解放自己, 不是要由教師去教導他過渡, 也不是要由教師去解放學生。

最後我們回來就台灣的大學通識教育, 尤其其中的科學較育, 如何實施的幾個現實問題, 試加以探討:

(一) 科學教育中的整體理解與創造, 是在通識教育中實施科學教育最重要的部份, 不論對人文或科學院系的學生, 都應強調這一部份。強調的方式可考慮

(1) 探討該課程的題材與文明發達的關聯, 例如討論與閱讀相關歷史。

(2) 用批判的觀點去看相關思想的演進, 例如從「物理學的進化」(Einstein-Infeld) 去談物理, 而不是講「物理學概論」, 同樣與其開「生命科學概論」, 不如談「演化論與遺傳」。

(3) 用問題中心的觀點, 去回溯於理論及已知知識, 例如從「恐龍爲什麼滅絕?」(許晴華著), 去引入古生物與地質的知識, 並展現前人獲取知識, 解決問題的方法。

(4) 用閱讀、寫報告、思辨與討論的方式, 讓學生主動去接觸相關知識。講演的授課方式, 最容易使學生落入分析性訓練, 甚至只停留在操作性訓練。只有從批判、思辨與克服困難中, 學生才會激發其整體思維的能力, 也才能縫補前述經驗網絡的斷層。

(二) 在今天台灣的大學教育體制下, 教育部仍掌握課程與文憑的核定權。大學畢業的必要條件是修完128學分的課程, 其中只有8個學分是通識課程。這是杯水車薪, 極爲荒謬的事。另外教育部仍規定其他共同必修科20學分 (6,6,4,4) 的課程內容。教育部應立即放棄對這些共同必修科的規定, 使它併入通識教育的課程中, 由各大學自行規劃, 通識教育才可能有一點起碼的發展。同時各科系教授應共同體認大學教育負有專業教育以及養成教育的雙重任務。培養稍具全面觀點的能力, 而有一定知性成熟的現代公民, 是大學不可推卸的責任。眞正的專業研究教育, 應由研究所去擔負。這是現代潮流所趨, 在此一共同體認下, 各科系應同意放出一些必修或選修學分, 供做通識教育之用。這是目前大學教育的課程結構, 亟需轉型的方向。

(三) 在目前大學課程結構不健全, 而且通識師資質量上皆明顯不足, 且意願偏低的情況下, 要推行通識教育, 困難重重。雙軌制是必要的, 一方面要規劃一些新的、有思辨性的核心課程, 作爲實驗。待條件慢慢成熟後, 再擴大實施。另一方面應藉目前各學院正式課程 (如經濟學原理、哲學概論等), 經過濾後, 提供學生跨學院去修課。像在台大, 眼前許多於1984年通識課程命令頒佈理後出籠的拼盤課程, 應大量淘汰, 只保留其中

少數, 加以改造, 而併入新通識課程表中。通識師資要逐年提升, 使通識教育的目標一步步達成, 教育部應: (1) 增加各校師資名額, 自海外大量延聘優異的專業人才回來, 逐年汰舊換新。專業好, 通識師資才能提高。通識教育不是膚淺庸俗的教育。正好相反, 只有很透徹的掌握專業知識的教授, 才能眞正教好通識課程。(2) 設計大學入學考試制度時, 應一併把延後分科的辦法確立, 學生入學之後可以不分院系, 到第三年之後才選擇主副修科系。

我們用 Freeman Dyson[5] 的一段文字來結束本文:

> To be a scientist means to take a hand in pushing (Niels) Bohr's dream along toward its final goals; the open world, the abolition of weapons of mass murder, the obsolescence of war. What the kids in the ghetto need, to open their minds to science, is not more hours of physics and chemistry, but a vision of a future that will be different from the past. A dream of a better future; that is what our kids need. And that is what science, if we don't confuse science with SAT scores, can give them.

參考資料

1. Havard Alumni Bulletin, vol.40, July, 1938. p1143.
2. Brubacher, J. S., On the Philosophy of Higher Education, Jossey-Bass. (1982), 2nd Ed..
3. Tom Bottomre, The Frankfurt School, Tavistock(1984), 中譯本廖仁義, 桂冠, 頁 10.
4. 參見 [3] p.44.
5. Freeman J. Dyson, To Teach or Not to Teach, Amer. J. Phys., June 1991, vol.59, No.6, p495.
6. 黃文雄,「人與世界」, 人本教育札記「教育與思想系列」(1989-1990)
7. Hlebowitsh & Hudson, Science Education and the Reawakening of the General Education Ideal, Science Enucation 75(5), pp.563-576 (1991)
8. Jürgen Habermas, Knowledge and Human Interests, trans. J. Shapiro, London: Heinemann (1971).
9. Max Horkheimer, The Latest Atack on Metaphysics, in his Critical Theory, trans. M. J. O'Connell (New York)
10. Krishnanmurti, Education and significance of Life.
11. Herbert Marcuse, One Dimensional Man, Boston, Beacon Press (1964), pp.140-172.
12. Herbert Marcuse, Industralization and Capitalism in the Work of Max Weber, Negations (1964), pp.66.
13. Bertrand Russel, The Impact of Science on Society (1952), Unwin Paperbacks (1976), p.32.
14. Robert S. Root-Bernstein, Discovering the Art in Science, The Sciences, Sept/Oct (1990), pp.44-47.
15. Rosovky, H., The University-An Owner's Manual, (1990) W. W. Norton.
16. Morris Shamo 的這段話, 參見 [13]p.117。
17. 葉啓政:「通識教育的內涵及其可能面臨的一些問題」, 清大。

—本文作者任教於台大數學系—

通識教育、科學教育與數學教育 (下)
——自然中的理性

黃武雄

引言

在本文的上篇「理性的叛逆與解放」中, 我們以批判理論對科學的責難開始探討, 分析了法蘭克福學派霍克海默 (Horkheimer)、哈伯瑪斯 (Habermas) 及馬庫色 (Marcuse) 等人的論點。他們所提出「科學訓練在培養人的工具理性、技術意識等」的指證, 應引起科技社群的反省。尤其馬庫色批評科技本身在維護現體制, 變成統治階級的共犯, 這類觀點值得科技社群警覺。

物理學家戴森 (Freeman Dyson) 亦指出 [1] 科學有美醜的兩個面向。上篇接近末尾時, 我引述過他的一段分析, 現在我把他這段分析, 用來作為今天這個報告的起點。他寫道:

> 科學是六面山, 有醜陋的三面: 僵化而威權的紀律與企業及營利目的掛勾, 又幫忙在製造集體殺人的武器, 另外也有美麗的三面: 對威權的顛覆有藝術一般的容顏及跨過國界、人類一家, 我們不能欺騙年輕的一代, 假裝科學沒有這些醜陋的面向。但我們也要引領青年人看到美麗的面向, 然後賦與他們完全的自由, 任他們自己去探察它的美麗與醜陋。

一、數學中的六面山

數學也有美醜的兩種面向。作爲科學的一個分支, 或所謂的科學之母, 許多人都把數學當做科學的工具來看待, 如果科學不能從資本主義社會或國家主義的工具化角色中掙脫出來, 那麼數學便也淪爲工具的工具:

$$數學 = (工具)^2。$$

這點也許是一些較有反省力或自主性的數學家, 不斷以數學的思考訓練重於工具訓練, 來對抗純實用性數學的背景原因。

但在強調數學思考訓練的同時, 我們則看到部份數學家自絕於外界, 只在思維世界裡營造其抽象體系, 建立主觀「結構」卻漠視「現象」。這帶來了一些數學工作及工作者本身的封閉性。二十世紀中期以二次大戰之後富裕的美國社會爲物質基礎, 數學的形式

主義風行一時, 造就了許多封閉的數學研究領域。這些領域隨著越戰的拖延而停滯。

數學的封閉性和它不必回到現象界去觀照自身的價值有關。同時這也是不完全的數學教育所造成的結果, 有些領域的數學研究由於分工的需要, 不免要在結構中專注, 但數學教育應讓學生明瞭問題的起源, 明瞭所研究的題材在整個探討過程中的位置。

除了工具化與封閉性之外, 數學的專斷性也是數學訓練常在不自覺中衍生的產物。康得 (Immanual Kant) 在寫「純粹理性批判」[2] 時, 想要找尋絕對的眞理作爲先驗的理性。他所提出的絕對眞理便是歐幾里得幾何: 他認爲三角形內角和等於一百八十度的這種幾何是絕對的 (the Absolute Geometry)。

換句話說, 許多時候人想要找到絕對的眞理, 便在數學中去找尋, 例如一加一等於二, 或像康德所指出的歐氏幾何。但這些都不是絕對的眞理, 而是相對於所處的系統。歐氏幾何到十九世紀也因 Lobatshevky、John Bolyai及 Gauss 所分別建立的雙曲幾何[3], 而從兩千年來被尊崇爲唯一的絕對幾何的王位退讓下來。

長年陷在數學結構與計算的訓練與研究, 如果未能認識數學結構與現象之間的關聯, 而能有較整體的了解, 如果未能認識數學作爲文明的一支, 應放回科學與人類社會去做全面觀照, 那麼數學將呈現三個醜陋面:

工具理性的工具, 封閉性與專斷性

就如 Freeman Dyson 所說, 我們應該也引領年輕的一代看到數學美麗的三面。這美麗的三面將造就出一種帶著數學特質的自由心智, 或許這才是數學教育最可貴的面向。

數學工作的一個重要面向, 是做本質的探討。對於自然的原理或語言, 數學家的態度與任務是尋找基本的結構與普遍的方法, 也因此可以深入理則世界的本質。好的數學家不會因爲一個特殊問題的具體應用得到解答而滿足的停止了其本質的探討。同時他也不會完全漠視現象與直覺, 而在純粹主觀思維與演繹體系中, 留連忘返。本質並不是與現象斷裂的東西, 而是從屬於衆多現象, 進一步加以一般化的結構與方法。

在理則世界中從事本質探討, 也許是數學家特有的偏好。本質探討也容易使人從傳統價值或現實權威中解放出來。透過直接觀察現象, 建立事實, 而進入理則世界的本質, 可以使人超越世俗的價值, 自理性的信仰中去否定現世的權威。數學訓練可以促發少年期的理性叛逆, 對於青年期的解放, 有一定的作用。一個意氣風發的少年, 隨著數學的引導, 進入理則世界的本質探討, 由於理性的嚴謹與純淨, 他會肯定獨立思考的內在價值, 從而由根本質疑世俗的傳統規範與權威。比起其他學科, 數學更容易使年輕人自然養成「吾愛吾師, 吾更愛眞理」的態度。這種態度使新生的一代更容易超越上一代, 使世界更容易更新。懷疑主義在堅實的理性基礎上將啓發更多的自由性靈與知識良心。六〇年代的反戰運動, 曾因羅素等人注入的懷疑主義而愈趨深刻, 因 Stephen Smale 與 Robinson 的理性直覺而更波瀾壯闊。

雖然從現世的權威中解放, 其實也近似於 Freeman Dyson 所指出的顛覆威權。但在數學的領域裡, 解放的功能會比自一般物質科學中啓蒙的效果更爲徹底, 這是因爲數學不直接依賴於物質世界。當一個人在思考「負負得正」的普遍理性, 思考「複數結構相對於實數結構的完整」與自我滿足, 思考「過線外一點可以有無窮多條平行線」的幾何本質時, 他更能把自我溶入理性之中, 使自我與理性變得不可分割, 這時理性的力量便容易使人從世俗的權力中掙脫出來。

數學中的理性探討,不直接依賴於物質, 也使得數學工作者, 較能遠離現實的利誘。當一些生化研究者在國家主義的旗幟下製造 Napalm 這類汽油燃燒彈, 以屠殺越南村童時, 資本主義社會的龐大計劃正隱藏在學術–軍事–企業三結合的底層, 遂行一種反人文主義的秘密企圖。一個學術研究者被籠罩在這龐大的計劃下, 不由自主, 這便是 Herbert Marcuse 所嚴厲批評的現象: 科技淪爲資本主義體制不可分離的一部份。科技工作者, 寄生在這體制之中, 成爲統治階級的共犯。

數學工作相對於其他科學分支來說, 是比較屬於個人的 (individual), 也比較自主 (autonomous)。某種意義下, 數學的研究應該比較民主 (democratic), 因爲數學的研究比較不容易作類似生產線的分工。一個數學研究所傑出的研究生便可以自己完成從提出問題到解決問題的一貫作業。許多好的數學研究都不是依賴大型的研究計劃做出來的。但這並不是說數學研究是個人心智封閉的產物。數學研究仍然需要互相激發、討論與徵引。同時也需要其他社會條件與科技水準的配合與衝擊。可是數學研究的過程, 比起其他科學分支, 遠爲獨立自主, 而不必在細密的行政規劃下進行。正是這種特質使數學在精神上有遠較開明 (liberal) 的一面, 而在物質上不必太受制於人, 不必太受現實利益所左右, 太受統治階級的指使。

數學研究者如果不因學科本身的訓練陷入封閉與專斷, 它反過來會造就更多自由開明的心智。這詭異的辨證關係其實也是數學研究令人著迷之處。

總結本節所談, 我們約略指出了數學這座六面山的不同面向。在醜陋的山陰, 我們看到了它的三面:

工具的工具
封閉性
專斷性

而在朝陽的那邊, 我們也看到另外三面:

作本質探討
從權威中解放
個體自主而遠離利誘

二、數學教育與通識教育

我在上篇「理性的叛逆與解放」「通識教育中的科學教育」一文中, 曾用專章討論我對通識教育的觀點, 尤其從認知發展的角度談到整體了解與技術訓練兩者之間的辯證關係。指出缺乏整體了解會導致人在分割的知識中異化, 也導致科技只殘存工具理性。作爲科學的基礎, 數學的操作訓練如果沒有整

體了解作爲觀照數學的窗櫺, 數學便會退居爲工具的工具。尤其進入數學結構的探討時, 數學更變得荒誕而多餘。

在同文中, 我也談到教育的目的。Krishnanmurti從心理的層次強調教育的目的在於免除人的恐懼, 可是現世的教育, 效果經常相反, 受的教育越多, 心中的恐懼也越多, 其實這是由於知識被分割得支離破碎, 專業與謀生被劃上完全等號的緣故。

從知識層次來說, 教育的目的與其說是要灌輸知識, 介紹知識不如說是要透過知識的發生催化人知性的成熟。通識教育常被誤解為全面的引介知識, 使無偏廢。以這種觀點理解通識教育會引致嚴重的錯誤。事實上, 通勢教育應改用較靈活較動態的觀點來看待。知識是人與外界互動的經驗, 通識教育的內容應該是使人在每一主要文明領域中深入領略人如何耕耘而取得知識的方法 與過程, 透過這過程中促發人知性上的成熟。

要催化人的知性成熟, 便須培養人對世界乃至對某一專業的整體了解。在專業 (如數學) 的養成訓練中, 如專注於分工後的某一區段, 使技術提升於整體了解之上, 那麼人反而會在專業中迷失, 把自己當作外物的工具, 產生排斥其他一切的技術意識。這是資本主義社會從事專業研究者的困境。而這現象不但發生在數學、科技甚至發生在法律、經濟以及文學藝術之中。把數學作爲人類文明的一支, 作爲人歷史活動的一面, 同時引導學習者, 溶自身於人類文明與歷史活動之中, 才能在數學教育中發揮通識教育的功能, 有助於提升人知性成熟的教育目的, 也才能讓學習者透過數學的整體了解, 掌握到前節所述的六個面向。

這理我提出幾點也許值得注意的做法:

(1)把數學當作人的活動, 當作人與自然對話的經驗, 而非先天的、靜態的自然規律, 亦非死的、現成的絕對真理。數學雖然有很大部份在發現與發展理性結構, 但結構是因現象而來, 結構之前有問題, 結構之中也有問題, 甚至結構之後仍有問題。要讓學生隨時意識到數學的結構是一連串問題問下來之後才累積出來的數學理論。「問題在那裡?」是隨時應該讓學生明白的事。知道問題所在, 才能分辨自身所在,也才能發生人的主體意識。理論產生之前應該有問題, 有了問題之後則開始分析問題, 開始嘗試錯誤, 因爲人類所有的知識都是人活動的痕跡, 沒有分析問題、沒有嘗試錯誤便沒有活動。數學的推理與結構不是空想得來的, 而是分析問題、嘗試錯誤後的產物。可是我們常只教推理與結構, 只將定義-定理-證明。這使得數學看起來不再是一種人文活動, 而是天上掉下來的死的東西。

(2)「現象 $\rightarrow$ 結構 $\rightarrow$ 現象」如此不斷循環發展過程, 才是數學的本來面目。只割裂其中一小段內容來教導學生, 會使得學生無法對數學的內容有較整體的了解, 而被窄化於技術層面。一貫作業使人明白工作全程。手工業時期的木匠在工作上給予兒女的啓蒙, 也許比現代企業下的工程師能給予兒女的, 更爲深刻而眞實。能經歷從素材到成品, 一步步解決問題, 克服困難的整段訓練過程, 才有助於人的知性成熟。

(3)學習數學, 不只當它作自身嘗試錯誤的活動。對於已有的數學理論, 也應該當它作前人摸索的經驗。數學史的講授是必要的。但數學史不應該被視爲天才的軼事來教導。遠爲重要的是人類在不同的時間面對什麼樣不同的問題, 用什麼樣不同的哲學態度看待自然, 發展數學, 從而孕育了什麼樣的數學思想, 引發了什麼樣的爭議, 當時的社會條件又與數學的發達存在著什麼樣偶然與必然的關聯。作爲人類文明活動的重要分支, 數學史只有用上述觀點去討論, 才能引發學生的知識熱忱, 帶領他們溶自身於人類文明之中。數學史不一定要另外開課, 較有效的做法是潛藏於各門課程之中, 使各門課程的數學內容不致孤立於人的歷史活動之外。我不妨舉幾個例子說明我心目中所認定值得提出來討論的題材:

(I) Euclid「幾何原本」與西方哲學思想的抽象特質

(II) Plato 幾 Archemides 對數學問題不同的哲學態度

(III) Fermat, Newton, Leibniz 對無窮小、無窮大、無窮和的哲學探討

(IV) 十九世紀數學嚴格化運動的爭議 (Cauchy- Weierstrass-Dedekind-Cantor)

(V) 康德的先驗純粹理性與非歐幾何

(VI) 從 Laplace 的古典決定論引到 Gödel 數學語句的無眞僞性 (undecidability)。

上述提及的例子, 只是一時想到的, 我認爲討論這種題材, 會助於促發人的思想成熟, 或至少對人的思考有較深刻的衝擊。

(4)數學亦是一種語言。一般我們所使用的各民族語言如果稱之爲人文語言的話, 那麼數學可以說是自然語言。建立這套自然語言, 是爲了要與「自然中的理性」對話。我所說的「自然中的理性」, 像負負得正, 像虛數 $\sqrt{-1}$ 的美好特性, 或像 Hopf-Poincaré 的奇點定理等等, 這些是看不到摸不到, 但隱藏在自然之中眞實存在的東西。這種看不到的自然理性構成了自然界看得到的現象中的基本規律, 從而孕育了人本身的理性。最後人本身的理性又成爲現代文明的特徵。也因爲這環環相扣的關聯, 人與自然中的理性對話的語言, 變成了人類文明的重要元素。在這裡我不用「重要工具」, 而改用「重要元素」, 理由是是語言不只像一般人心目中所認爲那樣, 只是工具而已。語言事實上反過來深刻的影響到人思想的內容與方法。數學作爲人類的自然語言, 如同通常所指的人文語言一樣, 也影響到人類文明的構成。十九世紀末期 Lancelot Hogben 便已指出數學是大小的語言, 數是名詞, 運算是動詞。但這種觀點仍窄化了數學的意義, 忽視了它與自然中的理性對話的語言本質。由於數學具有語言的本質, 它也就促成了人與自然之間、人與人的理性之間有關的溝通 (communication) 與互動 (interaction), 從而扮演起詮釋 (hermeneutic) 的功能。以 Jürgen

Habermas 對人類趣向的分類來說, 數學既具有其技術趣向 (technical interests) 及解放趣向 (emancipatory interests), 更由於它的語言本質, 亦具有實踐趣向 (practical interests)。對於數學有這樣的整體了解, 會使學習者在投入數學研究的同時, 較容易明白自身與自身工作的定位。

以上所提這幾點做法, 主要目的是想藉注重整體了解的數學教育促成人知性上的成熟。如果把數學斷章取義的等同於抽象或推理, 那麼數學會變得煩瑣無味, 且會有工具化、封閉與專斷傾向的流弊。而整體了解則有助於人知性上的成熟。注重整體了解的數學教育, 與通識教育的目的是一致的。

完整的數學教育, 便是一種人文素養的教育。我這樣說, 也許會令專業人文學領域的人感到錯愕或拒絕同意。但對於一個了解數學本質的人來說, 由於數學是人的活動, 是人類文明史上的重要一頁, 那麼從數學中可獲得人文素養, 無疑的是天經地義的事。

參考資料

1. Freeman J. Dyson, To Teach or Not to Teach, Amer. J. Phys., June (1991), vol. 59, No. 6, p.495.
2. Immanuel Kant, Critiques on Pure Reasons.
3. Morris Kline, Mathematical Thoughts from Ancient Age to Modern Times.
4. 黃武雄, 初等微分幾何講稿, 台大數學系 (1978)

—本文作者任教於台大數學系—

從等比級數談起

謹以此文紀念中央研究院數學所 陳明博教授 (1941.6.23 - 1997.12.9)

林琦焜

單研究人, 獲得的是沒有靈魂的知識軀殼, 單研究書籍, 獲得的是沒有血肉的知識的魂。看見, 並且觀察; 閱讀, 並且反省, 便是走在通往知識的正途上, 但必須在探討別人的心時, 不忽略自己的心。

— Caleb Colton —

前言

山不在高, 有仙則名; 水不在深, 有龍則靈。數學也是如此, 常常我們只為了尋求很難的問題而將周遭切身的眞理疏忽了, 以致淪為耍雜技, 訓練有素的猴子, 或者最後一無所有。在此筆者要特別呼籲 "好的數學"(good mathematics) 就是以越簡單的方法來解決困難的問題。如果要拔一根草需要開一部割草機或用大斧頭, 那實在是"有夠蠢"。就好比有人在小學, 先學了中學數學, 利用中學數學來解小學的題目, 無知的大衆都說這是天才, 但筆者則認為這頂多是另一隻耍雜技的猴子。

我們將從等比數列談起, 而後想辦法將此觀念推廣, 為了解決此問題, 自然而然矩陣的觀念就被引進, 除了介紹矩陣之外, 我們特別對 Fibonacci 數列 作了深入之研究, 當然我們的方法並沒有限定在此數列對其他的數列, 讀者也可嘗試。

我們在此文特別要探討的是"固有值", 除了以數列的角度來看之外, 也將由極值與微分方程的角度來思考, 最後要說的是"固有值就在你身邊"。

1. 等比數列, Fibonacci 數列

相信諸位在國中就學過等比數列, 而且也專精於此, 跟大家談這個題目也並不是要欺負你們, 而實在是常常許多眞理在我們身邊, 卻不時為我們所疏忽。在這個專題中我們要強調的是深奧的數學常常是寓含在 熟悉的數學中。

回顧一下等比數列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, \qquad n = 0, 1, 2, \qquad (1.1)$$

λ就是公比，等比數列方便之處在於只需知道數列中任一項則每一項 自然就尾隨而至，換句話說，描述等比數列僅需一個參數 (parameter) 即足夠

$$a_n = \lambda^n a_0, \qquad a_0 \in \mathbb{R} \qquad (1.2)$$

或者我們可以這麼說，這是一個一維的 (one dimensional) 問題，但等比數列畢竟是少數的特例，看個出名的 Fibonacci 數列

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots \qquad (1.3)$$

仔細觀察不難看出其遞推關係爲

$$a_0 = 0, a_1 = 1, \ldots, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \ n \geq 0 \qquad (1.4)$$

基本上這是一個差分方程 (difference equation)。現在的問題是如何求得第n項，例如a_{100}? 對於第n項是否有相類似於等比數列 (1.2) 之公式呢? 首先我們先解決 Fibonacci 數列的問題，典型的方法如下：由遞迴關係

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

知處於中間媒介的a_{n+1}如果可分解成兩部份

$$a_{n+1} = (\alpha + \beta)a_{n+1}, \qquad \alpha + \beta = 1 \qquad (1.5)$$

則原式可表爲

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta a_{n+1} + a_n \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha a_{n+1} + a_n \end{cases} \qquad (1.6)$$

由 (1.6) 式知如果a_n之係數可表爲

$$\alpha\beta = -1 \qquad (1.7)$$

則 (1.6) 式爲

$$\begin{aligned} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} &= \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ &= \cdots = \beta^{n+1}(a_1 - \alpha a_0) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} &= \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \\ &= \cdots = \alpha^{n+1}(a_1 - \beta a_0) \end{aligned} \qquad (1.8)$$

這是兩個等比數列! 換句話說，如果可找到 α, β 同時滿足 (1.5), (1.7) 兩式，則 Fibonacci 數列可化爲兩個等比數列。而α, β之意義呢?

$$\begin{aligned} & a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned} \qquad (1.9)$$

由根與係數之關係知，若 α, β爲一元二次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$之根，則 α, β滿足

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

這正是 (1.5), (1.7) 兩式告訴我們的。利用 (1.8) 式計算可得

$$a_{n+2} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{n+2}(a_1 - \beta a_0) - \beta^{n+2}(a_1 - \alpha a_0)\right] \qquad (1.10)$$

有了公式當然很好，但我們的目標並不在此，數學並非以求得答案爲唯一目的。重要的是在學習過程中，明白這其中之架構而後詢問是否可推廣，有否一般性，如果一個

方法只能解決一類問題, 那麼這並非一"好數學"! 上述之方法對於更複雜的數列, 顯然有其困難, 因此發展新的方法與工具乃是必然的結果。但記住我們的思考法則與概念還是建立在原有的基礎上, 而非憑空想像而來。如果學數學是依賴"靈感"的話, 那麼我們來接受教育便沒有意義!

對於 Fibonacci 數列而言: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 每個數 a_{n+2} 都是由前面兩個數 a_{n+1}, a_n 所決定。換句話說, 必須有兩個參數 (parameters) 方能完整地描述 Fibonacci 數列, 因此我們引進向量的概念

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \vec{x}_n = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}, \ldots \tag{1.11}$$

則 Fibonacci 數列可表爲

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} = a_{n+1} \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} \vec{x}_{n+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}_n \equiv A\vec{x}_n \\ &= \cdots = A^{n+1}\vec{x}_0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

此式正是等比數列 (1.2) 之推廣。我們先探討一下矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 直接計算可得

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1\,1 \\ 1\,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\,1 \\ 1\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,1 \\ 1\,1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 - A - I &= \begin{bmatrix} 2\,1 \\ 1\,1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\,1 \\ 1\,0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即矩陣A滿足一元二次方程式$f(x) = x^2 - x - 1$

$$f(A) = A^2 - A - I = 0$$

這正是 (1.9) 式所告訴我們的, 在線性代數稱爲 **Cayley–Hamilton** 定理。其實這個多項式很特別, 通常稱之爲特徵多項式 (characteristic polynomial), 該多項式可由行列式而得

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \det(\lambda I - A) \tag{1.13}$$

對於 Fibonacci 數列,$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 其特徵多項式爲

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)\lambda - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \end{aligned}$$

而 α, β爲$f(\lambda)$之兩個根, 在線性代數我們稱之爲 固有值 (eigenvalue), 即固定不變的值, 這可由 (1.8) 式視出一些端倪。

在前面提到α, β之求法, 實際上就相當於根與係數之關係, 這在矩陣有相似的理論, 我們先介紹一個簡單但重要的概念 —— 跡 (trace)。

定義: 矩陣$A = (a_{ij})_{ij}$之跡 (trace) 爲

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad (\text{對角線之和}) \tag{1.14}$$

對 Fibonacci 數列而言 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ 其跡 (trace) 爲

$$\mathrm{tr}A=1+0=1$$

再回到特徵多項式可知

$$f(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1=\lambda^2-(\mathrm{tr}A)\lambda+(\det A) \tag{1.15}$$

該式對任何2 × 2矩陣都對，但我們並不打算證明，只是提出這個事實。讓我們回到 (1.12) 式

$$\vec{x}_{n+1}=A\vec{x}_n=A^n\vec{x}_1$$

當n不大時A^n是不難計算，但當n越來越大之時，我們就不能憑匹夫之勇，硬算算出來那是浪費生命的。認爲只要努力就有收穫，那是不正確的，一個人的奮鬥必須有正確的方向，否則只是徒勞。某些特殊矩陣A，其A^n是容易求，例如:

$$A=\lambda I=\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}\Longrightarrow A^n=\begin{bmatrix}\lambda^n&0\\0&\lambda^n\end{bmatrix}$$

其實這就是等比數列所對應的矩陣。另外

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}\Longrightarrow A^n=\begin{bmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{bmatrix}$$

對於其他矩陣就沒有這麼便宜，如何求A^n?

這牽扯到矩陣對角化的問題。我們還是在回到 Fibonacci 數列，由 (1.6) 式可令

$$\begin{cases}x_{n+2}\equiv a_{n+2}-\alpha a_{n+1}\\ y_{n+2}\equiv a_{n+2}-\beta a_{n+1}\end{cases}$$

$$\vec{y}_{n+2}=\begin{bmatrix}x_{n+2}\\y_{n+2}\end{bmatrix} \tag{1.16}$$

即 (1.6) 式可改寫爲

$$\begin{cases}x_{n+2}=\beta x_{n+1}\\ y_{n+2}=\alpha y_{n+1}\end{cases}\Longleftrightarrow \vec{y}_{n+2}=\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\alpha\end{bmatrix}\vec{y}_{n+1} \tag{1.17}$$

這告訴我們 Fibonacci 數列經由適當的變換，可化爲兩個等比數列 (這個過程就是對角化 diagonalization) 其關係爲

$$\vec{x}_{n+2}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\vec{x}_{n+1}$$
$$\Longleftrightarrow \vec{y}_{n+2}=\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\alpha\end{bmatrix}\vec{y}_{n+1} \tag{1.18}$$

至此我們遇到的第一個問題是兩個不同矩陣

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\qquad \Lambda=\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\alpha\end{bmatrix} \tag{1.19}$$

是如何關聯的? 這就是矩陣對角化的問題，也是線性代數研究的主題之一。

由 (1.16) 式知

$$\vec{y}_{n+2}=\begin{bmatrix}1&-\alpha\\1&-\beta\end{bmatrix}\vec{x}_{n+2}\equiv P^{-1}\vec{x}_{n+2} \tag{1.20}$$

代入 (1.18) 式得

$$\begin{aligned}\vec{y}_{n+2}&=P^{-1}\vec{x}_{n+2}=P^{-1}A\vec{x}_{n+1}\\&=\Lambda\vec{y}_{n+1}=\Lambda P^{-1}\vec{x}_{n+1}\end{aligned}$$

這相當於說

$$P^{-1}A=\Lambda P^{-1}\Longleftrightarrow A=P\Lambda P^{-1} \tag{1.21}$$

這就是所謂對角化的過程，好處何在? 首先看矩陣的相乘

$$A^2=A\cdot A=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})$$

$$= P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}$$

$$A^n = A\cdots A = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})$$

$$\cdots(P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda^n P^{-1}$$

而其中

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix}\beta & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\beta^n & 0\\ 0 & \alpha^n\end{bmatrix}$$

這說明原先矩陣A^n是要經過 n個步驟, 但如今只需要三個步驟便可求得, 這就是對角化的好處之一。

關於矩陣P, 我們可以視爲高維度空間的變數變換, 但其意義卻不僅於此, 與固有值對應的就是 固有空間 (eigenspace)

$$W_\alpha = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, A\vec{x} = \alpha\vec{x}\} \qquad (1.22)$$

但

$$A\vec{x} = \alpha\vec{x} \iff (A-\alpha I)\vec{x} = 0 \quad (1.23)$$

因爲行列式 $\det(A-\alpha I) = |A-\alpha I| = 0$, 由解聯立方程組之經驗告訴我們 (1.23) 可能無解或無窮多解, 但顯然$\vec{x} = \vec{0}$爲(1.23)之一個解, 故 (1.23) 式有無窮多解, 這種解我們稱之爲 固有向量 (eigenvector), 如何求固有向量呢? 當然還是要回到"聯立方程組"

$$(A-\alpha I)\vec{x}=0 \iff \begin{cases}(1-\alpha)x + y = 0\\ x - \alpha y = 0\end{cases}$$

其解爲

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha y\\ y\end{bmatrix} = y\begin{bmatrix}\alpha\\ 1\end{bmatrix}$$

即固有空間W_α爲

$$W_\alpha = \left\{C_\alpha \begin{bmatrix}\alpha\\ 1\end{bmatrix} \,\middle|\, C_\alpha \in \mathbb{R}\right\} \qquad (1.24a)$$

同理可得另一固有空間

$$W_\beta = \left\{C_\beta \begin{bmatrix}\beta\\ 1\end{bmatrix} \,\middle|\, C_\beta \in \mathbb{R}\right\} \qquad (1.24b)$$

將 W_α, W_β 表爲如此完全是爲了讀者之方便, 其表示法並沒有唯一。通常變數變換之矩陣 P 是將固有向量 $\begin{bmatrix}\beta\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\alpha\\ 1\end{bmatrix}$ 按照順序排好而來, 若取特別的固有向量 $\frac{-1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}\beta\\ 1\end{bmatrix}, \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}\alpha\\ 1\end{bmatrix}$, 即

$$P = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}-\beta & \alpha\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad (1.25)$$

反矩陣 P^{-1} 之求法可由解聯立方程組而來, 令

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}-\beta & \alpha\\ -1 & 1\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases}x = \frac{1}{\alpha-\beta}(-\beta a + \alpha b)\\ y = \frac{1}{\alpha-\beta}(-a + b)\end{cases}$$

該聯立方程組之解爲

$$\begin{cases}a = x - \alpha y\\ b = x - \beta y\end{cases} \iff \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\alpha\\ 1 & -\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

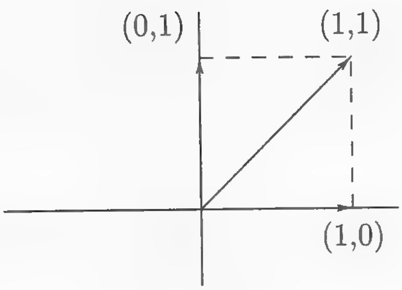
這相當於說

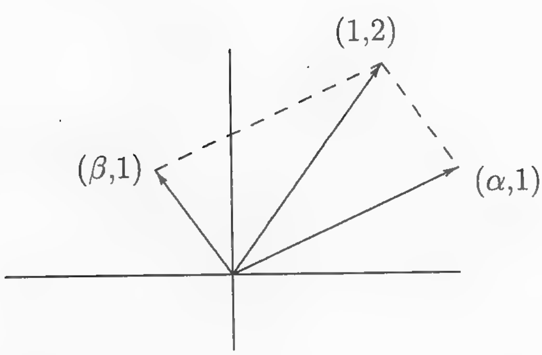
$$P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -\alpha\\ 1 & -\beta\end{bmatrix} \qquad (1.25')$$

這正是 (1.20) 式所表示的反矩陣P^{-1}, 其實解聯立方程組之過程就是在求反矩陣! 其本

質就是數學分析中出名的"反函數定理"。矩陣$P=\begin{bmatrix}\beta & \alpha\\ 1 & 1\end{bmatrix}$之幾何意義爲

$$
\begin{aligned}
P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\beta & \alpha\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\1\end{bmatrix}\\
P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\beta & \alpha\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix}\\
P\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\beta & \alpha\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta+\alpha\\2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\beta\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix}\\
&= P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$





即將平行四邊形的邊帶到邊, 對角線帶到對角線, 換句話說, 就是保持直線與保持平行四邊形這個性質在數學上稱爲 線性(linear)。矩陣P的性質還不只如此, 兩個行向量 (即固有向量) 是互相垂直的, 這可由內積而得

$$\begin{bmatrix}\beta\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix} = (\beta,1)\cdot(\alpha,1) = 1+\alpha\beta = 0$$

這同時也說明了

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{R}^2 = W_\alpha \oplus W_\beta;\\
&W_\beta = W_\alpha^\perp = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix}=0\right\}
\end{aligned}
$$

要特別提醒的是矩陣P並沒有唯一, 原因是我們有無窮多解。矩陣P之求法並沒有限定由 (1.20) 式而得, 利用固有值, 固有向量以及矩陣之運算法則亦可得, 令 $\vec{x}_\alpha \in W_\alpha, \vec{x}_\beta \in W_\beta$, 爲矩陣$A$之固有向量

$$A\vec{x}_\alpha = \alpha\vec{x}_\alpha, \quad A\vec{x}_\beta = \beta\vec{x}_\beta,$$

則

$$
\begin{aligned}
A[\vec{x}_\beta, \vec{x}_\alpha] &= [A\vec{x}_\beta, A\vec{x}_\alpha]\\
&= [\beta\vec{x}_\beta, \alpha\vec{x}_\alpha]\\
&= [\vec{x}_\beta, \vec{x}_\alpha]\begin{bmatrix}\beta & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix} \qquad (1.26)
\end{aligned}
$$

或

$$AQ = Q\Lambda, \quad Q = [\vec{x}_\beta, \vec{x}_\alpha] \qquad (1.26')$$

如果取特別的 $\vec{x}_\beta = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}-\beta\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{x}_\alpha = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix}$ 則 $Q=P$爲了方便底下我們默認 $\vec{x}_\beta = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}-\beta\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{x}_\alpha = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix}$。(1.26) 式的好處在於你僅需知道固有值、固有向量, 而不受維數之限制, 因此一般線性代數是從

此處談起, 但依筆者之體會, 則建議由 (1.8) 式著手, 因爲該式隱含了固有值的原始意義。

α,β爲特徵多項式$\lambda^2-\lambda-1=0$之兩個根, 由公式知

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618,$$
$$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0.618, \qquad (1.27)$$

α 就是鼎鼎大名的黃金分割。由 (1.12), (1.21) 式知

$$\begin{aligned}
&\vec{x}_{n+1}\\
&=A^{n+1}\vec{x}_0=P\Lambda^{n+1}P^{-1}\vec{x}_0\\
&=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}-\beta & \alpha\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\beta^{n+1} & 0\\ 0 & \alpha^{n+1}\end{bmatrix}\\
&\quad\cdot\begin{bmatrix}1 & -\alpha\\ 1 & -\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_0\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{\alpha-\beta}\\
&\quad\cdot\begin{bmatrix}\alpha^{n+2}-\beta^{n+2} & \alpha\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}\beta\\ \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & \alpha\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_0\end{bmatrix}
\end{aligned} \qquad (1.28)$$

如果取第一項就是 (1.10) 式

$$\begin{aligned}
a_{n+2}&=\frac{1}{\alpha-\beta}\big[a_1(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})\\
&\qquad +a_0(\alpha\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}\beta)\big]\\
&=\frac{1}{\alpha-\beta}\big[\alpha^{n+2}(a_1-\beta a_0)\\
&\qquad -\beta^{n+2}(a_1-\alpha a_0)\big]
\end{aligned} \qquad (1.29)$$

當然, 若你只是在意答案, 那麼便沒有再談下去的必要。偉大的牛頓曾如此自我比喻 — 我只不過是個小孩來到眞理的大海, 在此逗留, 偶而撿到幾顆貝殼吧! 許許多多的人來到了眞理的大海, 然而卻不曾"逗留", 以致讓眞理從旁擦身而過。在此建議諸位略爲停留、思索, 難道我們的故事到此就結束了嗎? 如果學習數學只是要得到一個答案, 那麼你還不懂數學。許多時候過程比答案要來的重要。

將$(a_1,a_0)=(1,0)$, $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 代入 (1.29) 式得, 例如,a_{100}爲

$$\begin{aligned}
a_{100}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{100}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{100}\Big]\\
&\approx 3.54\times 10^{20}
\end{aligned} \qquad (1.30)$$

諸位可能會懷疑 (1.30) 式這個數有根號又有分數, 實在很訝異, 但放心由 Fibonacci 數列之法則 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $a_0=0$,$a_1=1$, 因此所有的 Fibonacci 數必定是整數, 另外

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{100}\ll 1$$

這告訴我們:

$$\begin{aligned}
&\text{第}k\text{個 Fibonacci 數}\\
&=\text{最靠近}\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k\text{ 之整數}
\end{aligned} \qquad (1.31)$$

另外我們看一下 Fibonacci 數之比例

$$\frac{a_6}{a_5}=\frac{8}{5}=1.6$$

因此可相信的是 $\frac{a_{101}}{a_{100}}$更靠近 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$這個數就是前面提過古希臘人稱之爲黃金分割 (golden mean), 也因此爲何一個長方形之長寬比例爲1.618 : 1 看起來特別的美。

我們可以將 (1.28) 式表示得更漂亮, 首先將 $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 表爲固有向量 $\vec{x}_\beta = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}-\beta\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{x}_\alpha = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix}$ 之線性組合 (linear combination)

$$\begin{aligned}\vec{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} &= \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}-\beta\\-1\end{bmatrix}+\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix}\\ &= \vec{x}_\beta + \vec{x}_\alpha\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 = A(\vec{x}_\beta + \vec{x}_\alpha) = \beta\vec{x}_\beta + \alpha\vec{x}_\alpha\\ \vec{x}_{n+1} &= A^{n+1}\vec{x}_0 = \beta^{n+1}\vec{x}_\beta + \alpha^{n+1}\vec{x}_\alpha\end{aligned}$$

固有向量$\vec{x}_\beta, \vec{x}_\alpha$原先是分開就一直是分開, 這情形就如在平面$x$–$y$座標,$x$座標歸$x$座標 y座標歸y座標, 而現在是推廣到$\vec{x}_\beta$–$\vec{x}_\alpha$座標吧! 座標是變換了, 但似乎有某些東西是不變的, 例如

(i) $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 與 $\Lambda = \begin{bmatrix}\beta & 0\\0 & \alpha\end{bmatrix}$ 有相同之固有值β, α

(ii) $\mathrm{tr}A = 1+0 = 1 = \beta+\alpha = \mathrm{tr}\Lambda$

(iii) $\det A = \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} = -1 = \alpha\beta = \begin{vmatrix}\beta & 0\\0 & \alpha\end{vmatrix} = \det\Lambda$

關於這一連串有趣的事, 我們就留給線性代數吧!

2. 從極值的角度

我們從求極大極小值來看固有值, 習慣上還是從題目開始

例題: 試求二次型$A(x,y) = 4x^2+8y^2$之極值, 其中x, y滿足$x^2+y^2=1$?

解:

(法 I): 利用$x^2+y^2=1$之關係可得

$$\begin{aligned}A(x,y) &= 4x^2+8y^2\\ &= 4(x^2+y^2)+4y^2\\ &= 4+4y^2\end{aligned}$$

但$-1 \le y \le 1$, 因此$4 \le A(x,y) \le 8$即

$$\begin{aligned}\max_{x^2+y^2=1} A(x,y) &= 8, \quad (y=\pm 1)\\ \min_{x^2+y^2=1} A(x,y) &= 4, \quad (y=0)\end{aligned}$$

(法 II): 利用 Lagrange multiplier 此問題可化爲求

$$F(x,y,\lambda) = 4x^2+8y^2-\lambda(x^2+y^2-1) \tag{2.1}$$

之極值的問題, 分別對x, y微分得

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x} = 8x-2\lambda x = 0\\ \frac{\partial F}{\partial y} = 16y-2\lambda y = 0\end{cases} \tag{2.2}$$

這相當於

$$\begin{bmatrix}4-\lambda & 0\\0 & 8-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

但$(x,y)^t = (0,0)^t$並無法滿足 $x^2+y^2=1$, 因此上式除了 $(0,0)^t$解之外應還有其他解, 故

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}4-\lambda & 0\\0 & 8-\lambda\end{bmatrix} &= \begin{vmatrix}4-\lambda & 0\\0 & 8-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-4)(\lambda-8) = 0\end{aligned}$$

這就是前面所提的特徵多項式, 而λ則爲固有值, 分別是

$$\lambda = 4 \quad 或 \quad \lambda = 8$$

此時其對應之固有向量為

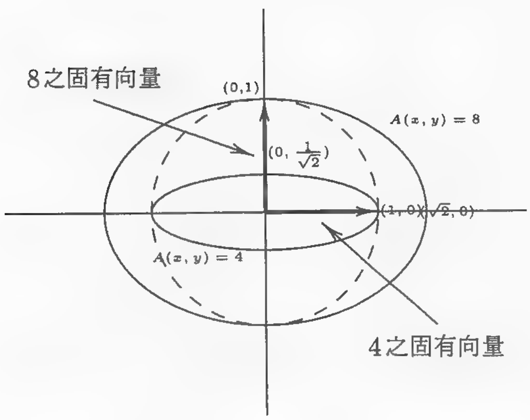
$$\lambda = 4 \quad \Longrightarrow \quad (x, y) = (1, 0)^t$$
$$\lambda = 8 \quad \Longrightarrow \quad (x, y) = (0, 1)^t$$

故

$$\max_{x^2+y^2=1} A(x, y) = 4 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 8$$
$$\min_{x^2+y^2=1} A(x, y) = 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 = 4$$

我們看看其幾何意義最大、最小值所對應之橢圓為

$$\begin{cases} 4x^2 + 8y^2 = 8 \\ 4x^2 + 8y^2 = 4 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}})^2 = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$



為何4, 8會是固有值呢? 我們將二次型表為

$$4x^2 + 8y^2 = [x, y] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

	x	y
x	4	0
y	0	8

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ (2.5)

顯然4, 8為矩陣 $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ 之固有值, 對於更一般的二次型則為

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

	x	y
x	a	b
y	b	c

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ (2.6)

這告訴我們研究二次型 $A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 相當於探討對稱矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, 我們同樣可問相同的問題。

例題: 試求二次型 $A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 之極值, 其中 $x^2 + y^2 = 1$?

依照前面的經驗可猜測的是其極值為固有值, 而$(x, y)^t$則為固有向量。

解: 利用 Lagrange multiplier 將此問題化為

$$F(x, y, \lambda) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \tag{2.7}$$

之極值問題分別微分得

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2ax + 2by - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2bx + 2cy - 2\lambda y = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

或

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

但$(x, y)^t = (0, 0)^t$並不滿足$x^2 + y^2 = 1$, 故行列式必為0

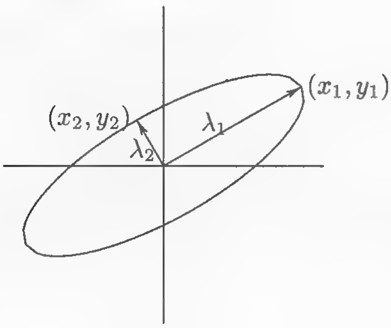
$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

設兩個固有值爲 $\lambda_1 < \lambda_2$, 而固有向量爲 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, 由標準式$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$可知

$$\frac{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2}{x^2+y^2} \geq \lambda_1$$
$$\Longrightarrow \min \frac{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2}{x^2+y^2} = \lambda_1$$

其他細節我們就留給讀者。



例題: 試求$x^2 + y^2$之最大值、最小值, 其中x, y滿足$3x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$。

解: 這個題目形式上與前一題雖然不一樣, 但本質上是相同的。既然我們已經習慣前一題之方法, 那麼就想辦法將問題轉化爲前一題之形式, 畢竟人是很難改變的。我們從複雜的一項開始

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 = [x, y] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 之特徵多項式爲

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-3)^2 - 2^2 = (\lambda-5)(\lambda-1)$$

固有值爲1, 5而固有向量爲

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

令

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

這個矩陣P滿足

$$P^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = P^{-1}$$
$$AP = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} P^t$$

利用此式可將原二次型變形爲

$$3x^2 + 4xy + 3y^2$$
$$= [x, y] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$= [x, y] P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

由上式知 (極自然) 可考慮變數變換

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y \end{bmatrix}$$

取轉置矩陣得

$$[X, Y] = [x, y] P$$

因此

$$3x^2 + 4xy + 3y^2$$
$$= [X, Y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$
$$= X^2 + 5Y^2 = 1$$

而且

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y)^2\\&\quad+(-\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y)^2\\&=X^2+Y^2\\&=X^2+\frac{1}{5}(1-X^2)\\&=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}X^2\end{aligned}$$

但X之範圍爲$-1\le X\le 1$, 故

$$\frac{1}{5}\le X^2+Y^2\le\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$$

極小值爲 $\frac{1}{5}$產生在 $(X,Y)=(0,\pm\sqrt{\frac{1}{5}})$, 而極大值爲 1則產生在 $(X,Y)=(\pm 1,0)$。

3. 微分方程的角度

固有值的另一個看法就是微分方程。考慮平面上一運動系統, 其位置座標爲 $(x(t), y(t))$, 其速度 (就是對 t 之微分) $(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})$ 滿足微分方程組

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=ax+by, & x(0)=x_0\\ \frac{dy}{dt}=cx+dy, & y(0)=y_0\end{cases}\tag{3.1}$$

如果引進向量的概念, 則 (3.1) 式可視爲一維的問題, 令

$$X(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix},$$

$$X(0)=\begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}\tag{3.2}$$

則 (3.1) 可改寫爲

$$\frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}X\equiv AX,$$

$$X(0)=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}\equiv X_0\tag{3.3}$$

對於n維空間, 我們也有與 (3.3) 式相似的結果。雖然 (3.3) 式很簡潔、清爽, 但重要的還是如何將解求出來, 否則只是畫餅充飢無濟於事。爲明瞭 (3.3) 式, 我們還是回到一維的情形, 數學的思維法則都是由簡而繁, 否則眞難想像一個人如何去思考。

$$\frac{dx}{dt}=at,\quad x(0)=x_0\tag{3.4}$$

利用分離變數法, 而後積分得

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x}=adt&\Longrightarrow\int\frac{1}{x}\,dx=\int adt\\&\Longrightarrow x(t)=e^{at}x_0\end{aligned}\tag{3.5}$$

由 (3.5) 之結果, 我們也期待 (3.3) 式之解也能表爲 (3.5) 式之形式, 因此我們作如下之假設

$$\begin{cases}x(t)=e^{\lambda t}u\\y(t)=e^{\lambda t}v\end{cases}\tag{3.6}$$

(u,v)待求。將 (3.6) 待入 (3.3) 得

$$\begin{cases}\lambda e^{\lambda t}u=ae^{\lambda t}u+be^{\lambda t}v\\ \lambda e^{\lambda t}v=ce^{\lambda t}u+de^{\lambda t}v\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}au+bv=\lambda u\\cu+dv=\lambda v,\end{cases}\quad AU=\lambda U,\quad U=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\tag{3.7}$$

這告訴我們解微分方程組 (3.3) 相當於解代數方程組 (3.7)。

微分方程 $\Longleftrightarrow$ 代數方程

這就是數學的精神, 以已知的知識 (代數方程) 來解決未知的問題 (微分方程), 並將既有的知識推廣。

λ就是矩陣A的固有值, 而$U=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 則是固有向量, 我們做個題目

例題: 試解微分方程

$$X'(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X$$

解: 矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ 之特徵多項式為

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3)(\lambda+1) \end{aligned}$$

因此固有值與固有向量分別為

$$\lambda=3,-1, \quad U_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ U_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

故 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$ 都是原微分方程之解, 再由重疊原理 (即線性) 知一般解為

$$X(t)=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

參考資料:

1. 林琦焜: 線性代數的基本定理, 數學傳播 (中央研究院數學所), Vol. 74, p.47–54(1995).
2. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley–Cambridge Press (1993), (美亞代理).

—本文作者任教於國立成功大學數學系—

數學畫

石厚高

很偶然的看到 1994 年十一月號 Scientific American 的 艾希的隱喻 Escher's Metaphors 小標題是「艾希畫作表達了數學與科學的抽象觀念」(The prints and drawings of M.C. Escher give expression to abstract concepts of mathematics and science.) 它的圖案很漂亮迷人, 蘇東坡說 "觀摩詰之詩詩中有畫, 觀摩詰之畫畫中有詩", 改成 "觀艾希之畫畫中有數學" 是很允當的。又想起二十多年前, 在台北市南海路美國新聞處開畫展的洪通, 他的畫作十分鄉土, 而本文圖案十分數學。我仔細看過, 覺得有益於數學抽象概念的了解, 所以寫下重點與感受。美國新聞處就是現在的美國文化活動中心。

原文很長只能擇其「重要者」或「我喜歡者」或「數學味兒」重者而談之。艾希 Maurits Cornelis Escher 畫作十分細膩又準確, 讓人懷疑是電腦作品, 用手畫出來當然不是「妙手偶得之」, 完全是天才又加上幹勁兒, 只有幹勁兒是作不成的。八幅畫作都有解說, 解說也都很數學, 想必是作者 Doris Schatischneider 所寫, 艾希既然數學很爛 (poor) 當然寫不出來這麼「數學」的文字。

這種圖猛一看很像透視圖, 細看又不是, 透視圖在西方國家早就有了, 就像我國從前的「界畫」一樣而風格大異, 以線畫、版畫爲最多。界畫是用界尺作畫, 畫成宮室樓臺, 本來是木工、木匠的行業故又稱匠學。直到十八、十九世紀法國藝術學院多流行水彩畫。進入廿世紀更是諸子爭鳴百花齊放, 有的用水彩、有的用不透明廣告顏料、有的用鉛筆、炭筆。六十年代以後更流行用針筆、噴筆來畫透視圖, 表現出一種特有的現代感。這種圖建築商用得最多, 他們都是找設計師事務所繪製, 一幅圖寬度大約是中學教室黑板寬度的一半, 高度大約是中學教室黑板高度的一又三分之一, 一幅圖幾個人畫要花上十天半個月, 收費五、六十萬或六、七十萬不等, 爲甚麼這麼貴, 因爲房子賣不賣得出去和這張圖有很大關係。

我很喜歡艾希的畫, 可是我說不出理由只是欣賞。讀中學時我不喜歡美術課, 美術常得丙, 我座位旁同學有時看不過去了, 常要強迫給我改改就得乙下。可是我喜歡報紙上的一些插圖, 尤其是副刊如聯合報、中國時報, 有些插圖畫得很細膩, 不乏光著屁股露著奶子, 看來很是賞心悅目, 一點也不引人遐

思, 更沒有猥褻感。有林崇漢.. 太多了, 記不得許多名字。有些我剪下來集成一冊, 偶而會拿出來欣賞一下蠻愉快的。

艾希 1898 年生於荷蘭 Leeuwarden 鎮。是個土木工程師的最小兒子, 雖然三位兄長走的都是科學或工程之路, 他可是個數學很爛的學生。由於高中美術老師的鼓勵, 他變得對平面藝術有興趣, 首先作刻膠版畫 (linoleum cut)。

終其生艾希常提到他對數學的無力感, 他說自己 "對講究精確的科學是一竅不通"。 可是從小他就對秩序和對稱 (order and symmetry) 著迷。著迷到去西班牙 Granada 的 Alhambra 去學鋪瓷磚圖案, 在數學論文裡找幾何畫, 終於在瓷磚畫作上走出自己的路。

艾希留意瓷磚組合畫作的著色, 搶在數學家與結晶學家在色對稱 (color symmetry) 領域作品出現之前。他的作品現在常被用來詮釋這些觀念。他的作品激盪人心, 數學家與科學家有強烈共鳴。他作品的主要衝勁是 "對存在於我們身邊自然幾何律的敏銳興趣"。用平面圖表示他的想法, 對科學上重要構想他提供了引人注目的視覺隱喻。

他能在不起眼的事物裡辨識引人注目的視覺效果—從不尋常的觀點來看紀念 建築物的建築細節, 小村莊大雜院樓梯間光影的取景, 密接於山坡的房子綿延至遙 遠山谷, 小至要從放大鏡來觀察的自然界瑣事。在他的工作室裡他會把這些草圖變 換成木刻與石版畫。作品的精神幾乎都是發自心靈的觀察而不是肉眼的目視。他尋求把構思用視覺來表達, 對人類觀察與了解意味模糊之處作詮釋。這時他發現自己 在一個被數學控制的世界裡。

艾希著迷了, 幾乎是沉溺於「平面的規律分割 (regular division of the plane)」。他一生著色畫作超過 150 多幅, 在創作圖裡把圖案一再的重複鋪滿平面, 證實了他的天才。這些作品說明了形形色色的對稱, 可是對艾希來說平面分割也意味著捕捉無限 (capturing infinity)。在作品 "Triangle System" 裡用蝴蝶作地磚原則上是能無限制的連續, 可也就提示了無限, 艾希的挑戰是把 infinity 界定在一張紙上。他也指出任何人一投入 infinity 就無法全身而退。

在完成了幾件「逐漸接近中心消失點, 圖樣愈來愈小」的作品之後, 艾希在找出一種能在反方向描繪愈來愈小的設計。他想要圖案不斷重複不斷逼近可就是永遠達不到圍繞的邊界。1957 年數學家 H.S.M. Coxeter 送給他期刊論文再版本, 文內他說明平面對稱用了幾個艾希的畫作。期刊裡有個讓他十分震驚的圖樣, 由三角形組成的雙曲棋盤形鋪嵌, 正是他要找的感覺。仔細研究過圖樣, 艾希看出了鋪磚規則, 圓弧和圍繞圓環的交角都是直角。以後三年他有四幅版畫都是這種棋盤格的型, Circle Limit IV 是其中最後一幅。

四年後艾希自己作出來了, 把 infinity 放在矩形裡。他的遞迴算則 (recursive algorithm) 一組方向重複應用於一件物品, 結果產生了自我相似的圖樣, 物品互有關連, 只不過大小有成比例的改變罷了。艾希

給 Coxeter 一份 underlying grid 的素描又道歉說：我擔心從你們數學的觀點來看, 這個題目不是很有趣, 因爲它眞的是像個平面拼圖。然而要找個過得去的方法, 來了解這個題目用最簡單可能的方式, 是件頭痛的事兒。

說來奇怪, 自我相似的模式提供了很多圖樣的例子, 它們是零星的、碎形、維, 一種艾希很受用的曖昧意味。艾希老實說, 能不嘲笑我們的成見嗎？ 例如故意弄混了二維與三維、平面與空間、嘲弄重力, 眞的是大樂事。在畫作 Day and Night 裡, 農田不可思議的變形成了三維天鵝。他也高興的指出曖昧與否定是科學實踐時本來就有的: 結合兩種景觀視爲一體。

艾希於 1972 年去世前不久很感性的說, 我最高興和數學家的交往與友誼, 他們常給我新的概念, 有時我們甚至互有影響。這些有學問的先生女士們是多麼的討人喜愛呀!

我寫完了「艾希的隱喻」把原文拿給女兒看, 要她說說看我爲甚麼喜歡艾希的畫, 她居然有艾希畫册 THE WORLD OF M.C.ESCHER, 這是部道林紙精裝鉅著, 不計封面與封底, 長、寬與高各爲 29.7、11.5、2 公分, 計 263 頁。她喜歡繪畫、藝術, 這本畫册我更是喜愛, 比起 Scientific American 上的插圖要精美多了, 我的眼界大開, 更以我父女原來有共同喜好而高興不已。

女兒說撇開數學的原理不談, 艾希的畫作引人進入一個和諧、規律卻又充滿變化的世界, 沒有壓力地在畫中世界遨遊, 時有令人驚訝的發現, 是喜悅, 也是享受。

這本書第 5 至 54 頁有五篇文章, 看過才發現原來艾希是這麼重要的人物, 在台灣從來就是未之有聞, 也許報章雜誌有過報導, 不過三十六年來我是很注意中文報章雜誌的, 我沒看到大概就是沒報導了, 我想這麼一位世界級擺盪於數學與藝術之間的數學畫家, 應該讓國人多多認識, 所以把本文篇名「艾希的隱喻」改成「數學畫」。下面簡介 THE WORLD OF M.C.ESCHER 的五篇文章。

(1) J.L.Locher “The Work of M.C. Escher”

傳統藝術界對艾希作品持某種程度之保留, 沒有受到高度敬重。對他畫作掌握繪畫技巧的絕妙原創性給予肯定, 可是他的作品被認爲太理性而欠缺感性。

雖然目前社會藝術與科學之間有明顯鴻溝, 艾希作品在科學家間可是國際馳名。早在 1951 年 STUDIO、TIME 與 LIFE 雜誌都有文介紹他, 使他揚名國際。1954 年九月他的作品在阿姆斯特丹 Stedelijk 博物館展出時, 正巧國際數學家會議也於同地舉行, 這份兒因緣際會是科學界仰慕他的開始。

展覽會空前成功, 他認識了很多科學家與理論家, 以後就常獲邀請去講他的作品。科學家爲艾希作品著迷, 一致認同不僅是艾希對他所熟悉世界的想像, 也是大家對那個世界的相似想法。對艾希和他們來說, 世界多元化表示的既不是荒謬也不是混亂, 而是尋求現象間邏輯關係的挑戰。首次面對艾希作品的奇特感或荒謬感經過分析就能解釋

了。這是艾希作品使人著迷的主要源頭, 作品中的眞實 reality 是了不起又是可以了解的 comprehensible 。

這篇文章長達 23 面, 歸納成四項重點:

艾希作品裡把指定結構與可辨識世界起了交互作用, 在 1937 年之前, 這個可辨識世界像個起點, 某結構要達到的起點。可是 1937 年後這個結構成了起點, 利用可辨識的主題可以看得到。

艾希的結構主義, 主要是表示輪廓線連繫與空間連繫, 二者都關注多元世界裡視野的交互作用。

世界多元化的想法, 也是現代藝術的主流, 可就有以下差異。艾希作品裡世界多元化並不意味混亂 (chaos) 而是秩序 (order), 他絕不只是關注多元結構, 而是結構與可辨識主題間的交互作用。

對世界多元化的想法, 看成是找出現象間新的邏輯關係與挑戰, 再加上結構與說明的唇齒相依, 在科學家與芸芸衆生間帶給艾希穩固名聲, 一般來說這些芸芸衆生對現代藝術都欠缺興趣。

(2) C.H.A.Broos "Escher : Science and Fiction"

艾希早期五十多幅作品, 是爲荷蘭中學教科書以及一篇爲結晶學論文作插圖。艾希繪畫大部份應用於自然科學, 某些作品是數學教材插圖資料是很明白的。不但數學家、結晶學家還有其它科學領域研究人員, 也使用艾希作品作插圖。邏輯發展與了解的結合, 使某些作品對抽像理論的視覺與說明, 能當作最適合的假說 (hypothetical) 模式。

數學家 Herman Weyl 在他的著作對稱 (SYMMETRY – Princeton,1952) 裡生動的描述, 利用對稱, 人類 "數世紀來試著去了解秩序、美與完美 (order、beauty、perfection)。" 在數學、藝術與描述事物時, 對稱的想法常是有益的起始點。對艾希來說, 對稱涵蓋於平面的規律分割中, 也是主要的靈感之源。所以 Weyl 著作的俄文版用艾希的畫來作封面也就毫不足怪了。

一幅艾希的畫居然採用作量子力學的插圖, 因爲他用了對稱的原理。物理學家也是諾貝爾獎得主楊振寧把一個新的假說公式化用到了對稱。關於這一點他說 "在量子力學絕無可能過度強調對稱的重要性"。這個假說從一般認定物理律的左右對稱, 進一步說明發生於某些基本粒子的偏差, 爲了闡明給衆多的外行, 楊振寧用了艾希作品騎士 (Horseman), 在 H. S. M. Coxter 與 C. H. MacGillarry 的著作裡談到騎士的數學性與結晶性的趣味。平面的規律分割導入亮與暗的對比, 騎士交互向左向右, 原來的與鏡像 (the original and the mirror image) 並不全等。例如, 讓騎士有同樣的顏色, 因爲他們有同樣的形狀, 他們可以把輪廓在白紙上畫成黑色, 可是有一半騎士是不同色的, 鏡像就不一樣了需要修正。艾希指出黑騎士是亮騎士的鏡像, 他在一個圓帶子上編排騎士圖案, 所以黑騎士亮背景中改變了顏色, 而鏡像又與原圖是一樣的。(我想這個圖讀者最好看看原書 168 頁下方, 這段話就很淸楚了) 這個特性讓畫作很適切的說明了一個事實, 基本粒子實驗的結果, 只有在作實驗

時才能複製, 一如既往, 在鏡像形式裡 : 爲了得到對稱, 楊振寧說

> 用鏡反射結合物質與反物質運作的交替 (combine the operation of switching matter and anti-matter with a mirror reflection)

不過科學家很少用艾希作品, 只有在畫作與理論在結構上十分一致時才用。

科學家與藝術家曾用艾希作品圖示共有又相似的創作天賦, 科學家裡尤其是數學家有此雅好。數學家 D. J. Lewis 擷取數學解之美與艾希方式作比較, 他評論“像艾希先生的作品, 反應在代數裡最美麗的層面, 常會涵蓋系統化方法以及極天才的無中生有論證。” (Introduction to Algebra, New York, 1965)。前面的一些例子關注科學家、學者與數學家以科學方式詮釋艾希作品來尋求事實。可是反過來呢, 科學界給了艾希價值概念反應在他的畫作裡。他終生的興趣在對稱與平面的規律分割早在二十多歲就開始了。

(3) M.C.Escher “Approaches to Infinity”

艾希談藝術饒有趣味, 有些事讓人大爲震驚, 他們不是人類心智的發現或發明, 只是獨立的存在著。地球早在有人類之前晶體就已經在地殼上了。有那麼一天有位老兄在地上撿到一顆規律石頭, 或者用石器砸碎石塊, 有東西掉在脚下, 他撿起來放在手上一看他呆住了。筆者想起愛因斯坦說過, 他在沙灘散步, 撿到一粒貝殼, 他們都是很謙虛的。本文在「艾希的隱寓」裡談的很多, 這裡就不多介紹了。

(4) G.W.Locher “Structual Sensation”

1963 年美國詩人兼文學評論家 Howard Nemerov 有專文透視艾希作品, 發表於專業雜誌 ARTIST'S PROOF 上, 題爲 The Miraculous Transformations of Maurits Cornelis Escher, 他說 “不論是不是像它那個樣子, 它都是持久的全神貫注藝術。” 這種執著的精神不僅侷限於藝術, 至少在科學上也一樣。作品兼顧現象與內涵, 就是艾希的作品爲甚麼吸引了那麼多科學家的主要原因。不論是科學家、社會科學家與語言學家, 他們關注的是藝術作品與本身作品間的某些相似性。

不論甚麼理由艾希作品使多人著迷, 提示了多項愉悅, 包括美學上的享受。一般說來畫展會場都是安靜、肅穆、莊嚴的, 可是艾希的畫展會場就大不相同了, 有的大笑享受畫作的某些特殊部分, 從畫作神交藝術家, 看到深獲我心之處所以大呼小叫討論其中發展。年輕人給長者解說。他的作品似乎有各種不同的解說, 全看個人感受, 對很多人來說, 最重要的是對建構感覺的或有或無的經驗。

(5) H.S.M.Coxeter “The Mathematical Implications of Escher's Prints”

G.H.Hardy 一度形容

> "眞正的數學" 有著 "高度的出人預料, 再加上不可避免與簡潔"
>
> "real mathematics" as having "a very high degree of unexpectedness, combined with inevitability and economy"

用來形容艾希的作品也一樣恰當。他說自己「我敏銳面對周遭的謎, 分析我作過的觀察, 我與數學領域說了 bye bye, 雖然在精確科學我毫無訓練或知識, 可是我與數學家間比起自己的同行來說, 有更多的共同點。」

和達文西 Leonardo da Vinci 與杜勒 Albrecht Durer 一樣, 艾希極爲欣賞五種 Platonic 立體, 也就是正四面體、正八面體、正六面體、正二十面體與正十二面體。「他們象徵人類期盼和諧與秩序, 同時也追求十全十美, 使我們敬畏又有無助感。正多面體不是人類心智的發明, 早在人類出現之前, 他們就已經在那兒了。」

(5) 文可讀性高, 數學談的多, 列舉了多幅作品解說詳盡。讀者最好能把畫作與五篇文章對照著看, 更能與艾希在作品上心靈交會。本書附錄指出艾希有著作九種、他作詮釋的著作三種、出現艾希畫作的科學著作與論文計 69 種、評論艾希藝術論文計 28 篇。

—本文作者任教於建國中學—

才冠群雄的數學大師

—爲紀念 Von Neumann 逝世四十周年而作

殷堰工

John是我唯一感到害怕的學生，如果我在講演中列出一道難題，那麼當我講演結束時，他總會手持一張潦草寫就的紙片説他已把難題解出來了。

—G.Pólya語

(一)

John Von Neumann 是二十世紀數學史上最偉大的數學家之一。由於他在研製世界上第一台電子數字計算機方面的開創性工作，西方奉獻他以“計算機之父”的桂冠。他多才多藝、學識淵博、機敏過人，在純粹數學、應用數學、物理學、計算數學及其它多個領域，如原子能的利用方面，都有重大貢獻。他存身於世五十三載，卻爲後人留下了巨大的科學遺產，已出版的「Von Neuman 文集」有六大卷，包括150多篇論文，計5000頁，其中關於純粹數學的60篇，屬於應用數學的60篇，屬物理學20篇，還有屬於其它領域的，不一而足。未得面世的遺稿，單收藏於美國國會圖書館的就達8000份之多。1988年在美國召開的「Von Neumann 的遺產」的數學會議上，認爲他雖不是 Nobel 獎獲得者，也不是 Fields 獎的獲得者，但他對社會的貢獻，確切地說，“對於社會的衝擊，就沒有人能與 Von Neumann 相提並論的了”。正如人們所指出的：“如果按年代先後去探討 Von Neumann 的個人志向和學術成就，那就等於探討了過去30年來科學發展史的概要”。

如此輝煌的業績自然來自於 Von Neumann 本人的努力，但也與他良好的天賦密不可分。1903年12月28日，Von Neumann 生於匈牙利首都一個銀行家的家庭，其父 Max Von Neumann 是一位富有的猶太銀行家。優越的家庭條件使 Von Neumann 從小受到良好的教育，愛稱 John 的他在家庭教師的教育下不斷成長。他從小天資過人，記憶力超群。據說，他能在很小時就會背出電話號碼，有過目不忘之功。他6歲已能心算八位數除法，8歲已開始掌握微積分運算方法，12歲就能閱讀深奧的「函數論」。這些傳聞儘管不可全信，但其才智過人卻是人盡皆知，一致公認的。誠如數學家 Halmos

說的:“有兩種英雄人物, 一種是和我們一樣的人, 但是能力比我們強; 另一種恰當地說是超人的智慧”。Von Neumann 顯然屬於後一種, 許多回憶文章都提到他那過人的才思便是明證。聰明才智, 加上敏捷勤奮和大膽創新的探索精神, 導致了 Von Neumann 豐碩的成果, 這也符合人類的成才規律的。

(二)

1914年, 第一次世界大戰爆發,10歲的 Von Neumann 開始進入正規學校學習, 師從著名數學家 Fejér, 又由數學 Fekete 爲其家庭教師, 學業進步神速, 中學畢業時便與 Fekete 合作寫出了第一篇數學論文並發表在德國雜誌上, 初露崢嶸。其後, 他順利地獲得了化學工程師的文憑和數學博士學位, 儘管這是在兩個不同的大學得到的, 但從中折射出其聰穎的側面。1926年至1933年, 對 Von Neumann 來說是動蕩的年代, 他輾轉德國的柏林、漢堡等大學, 直到1933年, 才由善於匯集人才的美國聘至著名的世界科學中心普林斯頓高級研究院任教授, 時年他才30歲, 成了年輕教授之最。事實上, 當時的 Von Neumann 早已具備這樣的實力, 1923年, 他發表的關於序數定義的論文, 這個定義至今仍被普遍使用;1925年, 其博士論文“經典力學的算子方法”引進了一個集合論的合理體系; 20年代後期, 他參與了 Hilbert 空間的算子譜論研究, 並建立了“算子環”理論, 又稱“Von Neumann 代數”; 1931年, 他又在數學上遍歷理論的基礎上作出了突破性的成績; 1932年, 他的「量子力學的數學的基礎」已譯成世界各種文字出版, 使量子力學有了可靠的表述。此外, Von Neumann 興趣廣泛, 除數學, 喜歡歷史, 他還是個語言高手, 拉丁語和希臘語稔熟, 英語更是不在話下, 又能講一口流利的德語與法語。他愛下棋, 待人友善, 不矜持, 不高傲, 這種多才多藝和良好的人際關後也是他受聘的一個原因。

1933年以後, 走上職業數學家生涯的 Von Neumann 倍加珍惜來之不易的職業, 他喜歡美國的環境, 爲了更好地研究數學, 他明瞭科學沙龍的作用, 於是, 他的家常常是科學家們研討學術的中心, 智慧的頭腦, 在這裡開出絢麗的花朵。在1936-1940年間, Von Neumann 與 Murray 合作發表了6篇關於非交換算子環的論文, 可說是20世紀分析學方面的傑作。其中提出了因子的概念, 其影響一直深入到今天的算子代數。與此有關, 在連續幾何的論文中系統地使用了正則環理論。他指出, 決定一個空間維數的是它所容許的旋轉群, 因而維數可以不再是整數, 具有連續維數空間的公理終於提出來了。無疑, 這是 Von Neumann 科學生涯中的重大成就之一。

(三)

1940年是 Von Neumann 科學生涯中的一個轉折點, 這主要源於第二次世界大戰的烽火。在此之前, 他是通曉物理學的純粹數學家, 由於戰爭的需要, 或者說是美國政府的需要, 他義無反顧地投入於反法西斯戰

爭的行列, 運用自己的聰明才智, 爲美國軍方服務, 逐漸成爲一名牢固掌握純粹數學的應用數學家。

在戰爭年代, Von Neumann 應召參與了許多軍事科學計劃和工程項目。先後擔任了彈道實驗研究所、海軍兵工局、製造原子彈的顧問, 直接參與了核武器的研製, 幫助設計了原子彈的最佳方案。戰後, 他仍然爲美國的軍事機關服務, 在海軍武器實驗室、空軍特種武器設計室、原子能委員會等處擔任顧問。1947年獲總統授與的美國海軍傑出服務勛章, 1956年又獲由總統授與的自由勛章。

這裡必須提及一事。爲了計算導彈的彈道, 當時美國軍方的200多名技術人員應陸軍要求每天需提供6張炮擊表, 而每張表都要計算幾百條彈道, 算一張表往往需二、三個月。爲此, 武器試驗場提出了研製世界上第一台電子計算機的初始方案。Von Neumann 自然投入於這項研製 ENLAC 的工作中, 改進了設計, 提出存貯程序運用電子計算機方案 EDVAC 。以後, 他陸續研究並完善了計算機。他對計算機設計作了根本性的改進, 特別是程序內存的思想, 以致於現在幾乎所有的計算機均爲 Von Neumann 型計算機。1946年, 總重量爲30噸, 占地172平方米, 用18000多個電子管, 功率爲140千瓦, 運行速度達5000次/秒加法的第一台電子計算機面世, 開闢了科學的新紀元。

Von Neumann 在應用數學上的另一個重大成就是創立了對策論和數理經濟學。1944年, 他和 Morgenstern 合著的「對策論和經濟行爲」標誌著這兩門新學科的誕生。時至今日, 已是應用廣泛、羽毛豐盛的科學分支了。

(四)

1955年, 正當 Von Neumann 在科學上勇攀高峰的時候, 一次例行的 X 射線檢查發現, 他不幸患上了癌症。然他以驚人的毅力克服癌症帶來的病痛, 抱病堅持工作, 集中研究自動機理論, 爲講座寫講稿「計算機與人腦」, 爲人們後來的人工智能研究打下了基礎。1957年2月8日, 一代數學大師帶著未完成講稿的最後部分的遺憾, 閉上了不瞑的雙目, 享年五十三歲。英年早逝, 令人婉惜不已。

綜觀 Von Neumann 科學的一生, 他是一位順應時代潮流的出色科學巨匠, 他審時度勢, 幾次調整研究目標, 在各個目標上均有建樹, 其不朽的一生至少在這樣十個方面作出了劃時代的貢獻: 純粹數學、遍歷理論、量子力學的數學基礎、對策論及數理經濟學、電子計算機研製、電子計算機應用、數值分析、蒙特卡羅算法、自動機理論、核武器的研製等。他的成功在於廣博知識作基礎, 旺盛的創新精神和踏實的求實態度, 形成了多維的知識結構和智能結構, 他把高度抽象的數學和實際應用巧妙地結合起來, 成爲跨學科的複合型人才, 其留下的科學研究方法同樣是人類不可多得的精神財富, 永遠爲後人所敬仰和享用。

—作者任教於中國蘇州教育學院數學系—

別瞧不起它, 那個中學教材中的公式

柳柏濂

一. 一個貌不驚人的式子

我的朋友蕭文強兄在「數播」(第二十卷第三期) 中發了一篇大作, 向讀者問一句"你懂得數嗎?"然後又謙遜地回答,"我可不懂"。文中, 蕭兄在"一勞永逸的數數"一節, 介紹了一個式子:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}, \qquad (*)$$

用它, 可以解決一些複雜的計數問題 (如 Fibonacci 數列的通項公式)。該文囿於講座對象, 未涉及高等數學"禁區"。即便如此, 掩卷之餘, 冒班門弄斧之險, 仍想說幾句話, 但願不是畫蛇添足之作。

就 $(*)$ 式而言, 是一個中學生也熟悉的式子。在中學教材"數列和極限"部分, 當我們考慮等比數列前 n 項和時,

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

$(*)$ 式的左邊, 實質是

$$\lim_{n\to\infty}(1+x+x^2+\cdots+x^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad (1)$$

當然, (1) 不能任何情況下都存在。於是, 歸結爲一個求極限問題:

當 $|x|<1$ 時, 顯然, 由 (1) 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

於是, 我們說, 當 $|x|<1$ 時, $1+x+x^2+\cdots$ 收斂於 $\frac{1}{1-x}$。

$(*)$ 式令數學家高興: 它實現了由無限向有限的轉化, 使對無限問題的研究不再那樣縹渺。$(*)$ 式又令中學生迷惘: 一系列無窮無盡的量相加, 竟然能夠等於一個確定的數?!

如果你一時之間也覺得不可思議的話, 那麼, 不難理解, 爲什麼八十多年前, 當德國數學家康托 (cantor) 先生開始研究無限時, 竟被那麼多人 (甚至權威學者) 譏笑爲"瘋子"。

二. Be careful! 歐拉 (Euler) 也曾出錯。

從有限到無限, 我們研究的對象已經不能一個個地窮舉出來。要把問題看得清楚, 只能靠嚴格的邏輯推理。這恰恰是對一個人數學才能的最大考驗。從出生那天開始, 生活在眼睛所及的"有限"空間中, 接觸著十、百、千的有限數量, 要一下子想像和推斷那個無限的空間形式和數量關係, 就好像騎了

幾十年自行車突然換開摩托車一樣, 一不小心, 容易出事。

可不是嗎? 在自然數集 $\mathbb{N}$ 中, 當我們建立了一一對應 $k \leftrightarrow 2k (k \in \mathbb{N})$, 偶數和自然數一樣多, 也就是部分竟然與全體相等。兩條點數一樣多的線段, 竟然長度不一樣。(見圖1的 AB 與 CD), 這些都是我們用"世俗"眼光, 所不能理解而又完全正確的結論。

現在, 讓我們回到所討論的 $(*)$ 式中。十八世紀歐州的大數學家歐拉, 就犯過下列的錯誤。

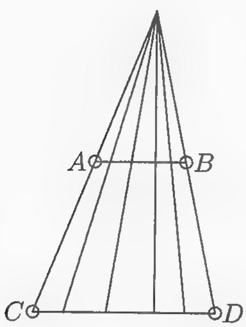


圖 1

運用 $(*)$ 式

$$n+n^2+n^3+\cdots=\frac{1}{1-n}-1=\frac{n}{1-n} \tag{2}$$

又

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{n}{n-1} \tag{3}$$

(2),(3) 兩式相加, 得

$$\cdots\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1+n+n^2+n^3+\cdots=\frac{n}{1-n}+\frac{n}{n-1}=0 \tag{4}$$

如果說, (4) 式的錯誤還不明顯的話, 那麼, 在 $(*)$ 式中, 若令 $x=2$, 我們將得到一個荒謬得更顯然的式子:

$$1+2+4+8+16+\cdots=-1$$

這些謬誤的產生, 在於沒有弄清 $1+x+x^2+\cdots$, 僅當 $|x|<1$ 的範圍內收斂。也就是, 要在 $(*)$ 中的 x 代入數, 使等式成立, 就必須代入 $|x|<1$ 範圍內的數。

從有限到無限, 處處應該 be careful! (小心)。

三. "換一個活法", 如何?

討論 $(*)$ 式的收斂和發散, 是函數論專家的事情。他們專注於連續的數學。可是, 事情就是這麼有趣: 如果我們把 $(*)$ 式用另一個觀點來處理,"換一個活法", 它竟可以處理離散數學中的計數問題。

還是從 $(*)$ 式談起。把 $(*)$ 兩邊平方, 即

$$(1+x+x^2+\cdots)^2=\frac{1}{(1-x)^2} \tag{5}$$

(5) 式的左邊, 用乘法可得

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+\cdots)^2\\=&1+2x+3x^2+4x^3\\&+\cdots+(n+1)x^n+\cdots\end{aligned} \tag{6}$$

(5) 式的右邊, 用長除法, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2}&=\frac{1}{1-2x+x^2}\\&=1+2x+3x^2+4x^3\\&\quad+\cdots+(n+1)x^2\cdots,\end{aligned} \tag{7}$$

(6) 和 (7) 相應的 x^k 項的係數相等。一般來說, (7) 的推導比 (6) 容易, 那麼我們便可通過 (5)、(7) 式, 直接得到 (6) 式, 解決了一個無窮級數的平方問題。

這個例子啓示我們: 如果不考慮 x 的值, 僅把 (∗) 式作爲一種形式的冪級數, 那麼, 利用它, 把無限 (級數) 變成有限 (函數), 把無限 (級數) 的運算轉化爲有限 (函數) 的運算 ((5) 式), 再把運算結果回復到無限 (如 (7) 展成級數)。注意到前後兩個級數的 x^k 項係數相等, 於是, 便幫助我們解決無窮級數的運算問題。下面, 我們還可以看到, 進而解決一些計數問題。

一般, 一個無窮數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ 這是一個離散的研究對象。如果我們用 x^i 的指數 "記錄" a_i 的下標, 那麼, 可以把數列寫成下列形式冪級數

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

進一步, 若上述形式冪級數能等於一個函數 (哪怕它在 x 的某一範圍內收斂),

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = f(x),$$

則 $f(x)$ 稱爲數列 $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ 的生成函數。(或準確地說: 常生成函數)。例如, 在 (∗) 式中, $\frac{1}{1-x}$ 是數列 $(1, 1, 1, \ldots)$ 的生成函數。

把離散和無窮的數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 載上 $f(x)$ 的這隻船上。下面我們將看到, 怎樣依靠 $f(x)$ 這隻船的動力, 把 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ 駛到彼岸。

四. 再走一步, 便能小試牛刀

不要小覷了 (∗) 的那個中學教材中的式子, 再走一步, 就能幹大事。

如上所述, $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots$。

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

再做下去,

$$\begin{aligned}
&(1-x)^{-3} \\
&= (1 + x + x^2 + \cdots) \\
&\quad \cdot(1 + x + x^2 + \cdots) \\
&\quad \cdot(1 + x + x^2 + \cdots) \\
&= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{2}(n+2)(n+1)x^n + \cdots \\
&= \binom{2}{0} + \binom{3}{1}x + \binom{4}{2}x^2 \\
&\quad + \binom{5}{3}x^3 + \cdots + \binom{n+2}{n}x^n + \cdots
\end{aligned}$$

自然, 可以推測

$$\begin{aligned}
&(1-x)^{-1} \\
&= \binom{r-1}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r+1}{2}x^2 + \cdots \\
&\quad + \binom{r+n-1}{n}x^n + \cdots,
\end{aligned}$$

用求和記號 $\sum$, 可記爲

$$(1-x)^{-r} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} x^n \qquad (**)$$

要證明 (∗∗) 式, 也不是非要高等數學不可, 我們採用數學歸納法解決它。

證明: $r=1$, 公式 (**) 即為 (*), 成立。(直接用長除法亦可證明)。

設 (**) 對 r 成立, 往證對 $r+1$ 亦成立。

$$\begin{aligned}
&(1-x)^{-(r+1)}\\
&=(1-x)^{-r}\cdot(1-x)^{-1}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r+n-1}{n}x^n\cdot(1-x)^{-1}\\
&=[\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}x+\binom{r+1}{2}x^2+\cdots\\
&\quad+\binom{r+n-1}{n}x^n+\cdots]\cdot\\
&\quad(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)\\
&=\binom{r-1}{0}+[\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}]x\\
&\quad+[\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}+\binom{r+2}{2}]x^2+\cdots\\
&\quad+[\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}+\binom{r+1}{2}\\
&\quad+\cdots+\binom{r+n+1}{n}]x^n+\cdots\\
&=\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}x+\binom{r+2}{2}x^2\\
&\quad+\cdots+\binom{r+n}{n}x^n+\cdots\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{(r+1)+n-1}{n}x^n.
\end{aligned}$$

上述的化簡, 只是重複應用組合恆等式

$$\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}=\binom{m+1}{k}$$

的結果。於是, 便證得 (**) 式。

有了 (**) 式 ((*) 是它的特例), 我們可以對一些組合問題小試牛刀了。

問題1: 求不定方程

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r=n \qquad (8)$$

的非負整數解 $(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ 的個數。

解: 每個不定元 x_i 的取值可能是 $0,1,2,3,\ldots$, $i=1,2,\ldots r$, 我們用冪指數表之以

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+\cdots=(1-x)^{-1}$$

於是, 問題歸結為求 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^r$ 的展開式中 x^n 的係數。

由(**) 式, $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^r=(1-x)^{-r}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r+n-1}{n}x^n$, x^n 的係數是 $\binom{r+n-1}{n}$, 即 (8) 的非負整數解個數是

$$\binom{r+n-1}{n}。 \qquad (9)$$

附註: 如果把問題1的"非負整數解"條件改為"正整數解"條件, 則只須對方程 (8) 作一個變換 $x_i=y_i+1$, $r=1,2,\ldots,r$。問題歸結為求 $y_1+y_2+\cdots+y_r=n-r$ 的非負整數解 $(y_1,y_2,\ldots,y_r)$ 的個數, 由問題1結論, 得

$$\begin{aligned}
\binom{r+(n-r)-1}{n-r}&=\binom{n-1}{n-r}\\
&=\binom{n-1}{r-1} \qquad (10)
\end{aligned}$$

問題2: 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=21$ 的所有奇數解的個數。

解: 只需求 $(x+x^3+x^5+\cdots)^5$ 展開式中的項 x^{21} 的係數。

因 $x^5(1+x^2+x^4+\cdots)^5 = x^5(1-x)^{-5}$, 即求 $(1-x^2)^{-5}$ 的 x^{16} 項係數, 也即求 $(x^2)^8$ 係數。由結果 (9), 得 $\binom{5+8-1}{8} = 495$。

問題3: 求方程 $x_1+x_2+x_3=14$ 不大於8的非負整數解的個數。

解: 只需求 $(1+x+x^2+\cdots+x^8)^3$ 的展式中 x^{14} 的係數。但 $(1+x+x^2+\cdots+x^8)^3 = (1-x^9)^3(1-x)^{-3}$。$(1-x^9)^3$ 的展式中 x 的次數不大於 14 的項僅有 1 和 $-3x^9$, 於是只需考慮 $(1-x)^{-3}$ 中 x^{14} 與 x^5 的係數, 它們分別是 $\binom{3+14-1}{14}$ 和 $\binom{3+5-1}{5}$。因此, 所求的解的個數是

$$\binom{3+14-1}{14} - 3\binom{3+5-1}{5} = \binom{16}{2} - 3\binom{7}{2} = 57$$

問題4: 求方程 $x_1+2x_2=n(n\geq 0)$ 的非負整數解個數。

解: 把 $\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}$ 分解爲部分分式, 即

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} &= \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}\\ &= \frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1}{4(1+x)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ &\quad+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{(-1)^n}{4}\right)x^n。\end{aligned}$$

於是, 所求的非負整數解個數

$$= \begin{cases}\frac{n+1}{2}, & n\text{爲奇數}\\ \frac{n}{2}+1, & n\text{爲偶數}\end{cases}$$

對一般的 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx^n=n$ 的非負整數解個數, 其生成函數應是

$$\frac{1}{(1-t^{a_1})(1-t^{a_2})\cdots(1-t^{a_n})},$$

但由於分解部分分式遇到的困難 (見問題 4), 求解將是一個極爲困難的問題。哈代 (Hardy) 曾提供下列特殊不定方程

$$x+2y+3z=n \qquad (11)$$

的非負整數解個數的簡潔表達式 $\langle\frac{1}{12}(n+3)^2\rangle$, 其中 $\langle\alpha\rangle$ 表正實數 α 的最接近整數 (其中 2α並非一整數), 即 $|\langle\alpha\rangle-\alpha|<\frac{1}{2}$。

哈代的解法是: 令 $w=e^{2\pi i/3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $(i=\sqrt{-1})$ 則 (11) 的生成函數

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}\\ &= \frac{1}{(1-t)^3(1+t)(1-wt)(1-w^2t)}\\ &= \frac{1}{6(1-t)^3}+\frac{1}{4(1-t)^2}+\frac{1}{72(1-t)}\\ &\quad+\frac{1}{8(1+t)}+\frac{1}{9(1-wt)}+\frac{1}{9(1-w^2t)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{7}{72}\\ &\quad+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\Big)t^n\end{aligned}$$

因 $|-\frac{7}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}|\leq\frac{32}{72}<\frac{1}{2}$, 且 (11) 的解組個數必爲整數, 故此個數是 $\langle(n+3)^2/12\rangle$。

請讀者不要以爲, 我們僅僅在討論一次不定方程的非負整數解的個數問題。要知道,

很多組合計數問題, 都可以把上述不定方程作爲它的數學模型。請看

問題5 (分配問題): 把12個相同的球投入5個不同的箱子內, 有多少種不同的放法?

這實質是求$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12$的非負整數解個數。

問題6 (齊次項問題): 5個不定元組成6次齊式, 最多有多少種不同類項?

設 5 個不定元的 6 次齊式一般式是 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}x_5^{\alpha_5}$, 這即求 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=6$ 的非負解個數。

問題9 (擲骰問題): 擲 n 顆骰子, 有多少種不同的結果?

即求 $x_1+x_2+\cdots+x_6=n$ 的非負整數解個數。

對於求 $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ 的非負整數解個數的問題, 我們還可以這樣理解: 從 r 類不同的物中取出 n 個, 每類物允許取重複數, 有多少種不同的取法。因此, $\binom{r+n-1}{n}$ 就是從 r 個物中可重複地取 n 個的組合數。

此外, 這類問題的另一個組合意義是: 把一個整數 n 分拆爲 r 部分, 其中可以包括 0, 這稱爲 n 的 r 有序分拆, 其分拆個數便是 $\binom{n+r-1}{n}$。

給出幾個問題, 似乎都是小打小鬧, 然而, 它卻揭示了生成函數方法的精髓。運用這一技巧, 我們試試做一點“大事”。

五. 把那一類遞歸式一攬子解出來

借用電視螢幕經常出現的字句, 說一聲: “下列內容可能引起部分觀衆不安”, 可是, 認眞咀嚼一下, 也許你會覺得: 味道好極了。

試考察關於 u_n 的常係數線性齊次遞歸式

$$\begin{cases} u_{n+p}=\sum_{i+0}^{p-1}a_{p-i-1}u_{n+i} \\ u_i=c_i,\ i=0,1,\ldots,p-1 \end{cases} \tag{12}$$

這裡 $a_i, c_i, i=0,1,\ldots,p-1$ 是常數。

求 (12) 的一般解 u_n, 是計數理論中的一個重要問題。對於 (12) 式的特殊情況, 可以用特徵方程法。但對一般情形, 由於要遇到高次特徵方程, 此法便不敷應用。在 (12) 式中, 若令 $p=2$, $a_0=a_1=1$, $c_0=c_1=1$, 則其解便是 Fibonacci 數的通項公式, 在蕭文 (「數播」二十卷三期) 中敍述了求解的生成函數方法。現在, 我們一般地, 給出 (12) 的一個解。

設序列 $u_0,u_1,\ldots,u_n$ 的生成函數

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n \tag{13}$$

則由 (12),

$$(1-\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)u(x)=\sum_{j=0}^{p-1}b_jx^j。 \tag{14}$$

這裡

$$b_j=c_j-\sum_{i=0}^{j-1}a_{j-i-1}c_i,$$
$$約定當i<0時, a_i=0, \tag{15}$$

由 (14) 得

$$u(x)=(\sum_{j=0}^{p-1}b_jx^j)(1-\sum_{i=0}^{j-1}a_{i-1}x^i)^{-1}, \tag{16}$$

依 (*) 式

$$(1-\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)^n \tag{17}$$

由多項式定理, 展開

$$\begin{aligned}&(\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)^n\\ &=\sum_{\sum_{i=1}^{p}ik_{i-1}=n}\binom{\sum_{i=0}^{p-1}k_i}{k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}}\\ &\cdot a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdots a_{p-1}^{k_{p-1}}x^n,\end{aligned} \tag{18}$$

爲方便敍述, 令 $\sum_{i=0}^{p-1}k_i=k$,

$$f^{(n)}=\binom{k}{k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}}a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdots a_{p-1}^{k_{p-1}}$$

則由 (18)

$$(\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)^n=\sum_{\sum ik_{i-1}=n}f^{(n)}x^n \tag{19}$$

把 (19) 代入 (17) 得

$$(1-\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{\sum ik_{i-1}=n}f^{(n)})x^n \tag{20}$$

記

$$F^{(n)}=\sum_{\sum ik_{i-1}=n}f^{(n)} \tag{21}$$

(20) 簡記爲

$$(1-\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}F^{(n)}x^n,$$

代入 (16), 便得

$$u_{(x)}=(\sum_{j=0}^{p-1}b_jx^j)(\sum_{n=0}^{\infty}F^{(n)}x^n),$$

$$u_{(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{p-1}b_jF^{(n-j)})x^n$$

與 (13) 對比, 便得

$$u_n=\sum_{j=0}^{p-1}b_jF^{(n-j)}$$

以 (15) 代入, 得

$$\begin{aligned}u_n&=\sum_{j=0}^{p-1}(c_j-\sum_{i=0}^{j-1}a_{j-i-1}c_i)F^{(n-j)}\\ &=\sum_{j=0}^{p-1}F^{(n-j)}c_j-\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{j-1}a_{j-i-1}F^{(n-j)}c_i\\ &=\sum_{j=0}^{p-1}F^{(n-j)}c_j-\sum_{i=0}^{p-2}\sum_{j=i+1}^{p-1}a_{j-i-1}F^{(n-j)}c_i\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}u_n=&\sum_{i=0}^{p-2}[F^{(n-i)}-\sum_{j=i+1}^{p-1}a_{j-i-1}F^{(n-j)}]c_i\\ &+F^{(n-p+1)}c_{p-1},\end{aligned} \tag{22}$$

(22) 便是 (12) 的一般解。

試考察 $p=2$, $a_0=a_1=1$, 且令 $c_0=c_1=1$, 則 (12) 變爲

$$\begin{cases}u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\\ u_0=u_1=1\end{cases}$$

易知, 這是 Fibonacci 數列的遞歸定義。這時 (21) 式爲

$$F^{(n)}=\sum_{k_0+2k_1=n}\binom{k_1+k_2}{k_2}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}。$$

又因 $\sum_{j=0}^{i} b_j x^j = b_0 + b_1 x = 1$ (由 (15) 得 $b_0 = 1$, $b_1 = 0$) 故得

$$u_n = F^{(n)} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-k}{k}。$$

六. 大數學家做出的結果, 我們也來試試

十九世紀, 克希霍夫 (Kirchhoff) 在研究電路網路, 凱萊 (Cayley) 在計算有機化學的同分異構體個數時, 引進了樹圖—連通而不含圈的無向圖。對於有 n 個標號點的樹 (簡稱爲 n 階標號樹) 的個數, 已有 Cayley 公式 n^{n-2}。如果把一棵樹的某一點稱爲根, 則這棵樹稱爲有根樹。因爲每個點都有可能是根, 根據 Cayley 公式, n 階標號有根樹的個數自然是 $n \cdot n^{n-2} = n^{n-1}$。關於 Cayley 公式的不同證明, 已經吸引了不少數學家的興趣, 並且開發了很多精巧的方法。讀者可以參看拙作「樹的計數-從樹到超樹」(「數播」第十九卷四期)。

如果把 n 個標號點的標號去掉, 那麼, 樹的計數要複雜得多。就拿有根樹來看, $n = 4$ 時, n 階標號有根樹的個數是 $4^{4-1} = 64$個, 而 n 階有根樹的個數僅有4個, (如圖1), 後者的計數要兼顧判斷同構的樹。

凱萊研究了 n 階有根樹的個數 T_n, 他用生成函數把序列 $\{T_n\}$ 表爲 $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n$, 得出了下列結果

$$T(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-T_n} \qquad (23)$$

運用 (23), 加上一些代數變換技巧, 我們可以算得 T_n, 茲把電腦算得的某些值羅列如下:

T_n 值表 $n \leq 12$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
T_n	1	1	2	4	9	20	48	115

n	9	10	11	12
T_n	286	719	1842	4766

當年, 凱萊推導 (23) 式時, 用了較複雜的方法。注意到 (23) 式的樣子, 並不像標號樹的計數式那樣漂亮。因此, 數學家對尋求它的簡明的證法信心和與趣都不大。在計數理論中, (23) 的推導基本上還是凱萊的思路。現在, 我們著手嘗試用一一對應的思想和本文論述的 (**) 式, 去給出一個新而簡明的證法。

我們可以如下考察 $(n+1)$ 階有根樹: 一個 $(n+1)$ 階有根樹去掉根點, 並令原來與根點相鄰的各點爲根點, 就得到若干支有根樹 (如圖3所示意)

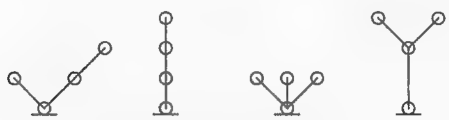


圖 2: 4階有根樹

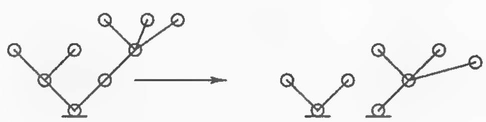


圖 3

這些有根樹所成的集合具有如下特點:

(1) 它們按階數有可能分爲 n 類, 階數爲 i 的類, 我們稱之爲第 i 類。$i = 1, 2, \ldots, n$

(2) 第 i 類的有根樹又可能有 T_i 種各不相同的有根樹, 把這 T_i 種有根樹編號爲 $1, 2, 3, \ldots, T_i$, 則第 i 類的樹必取自這 T_i 種樹的“倉庫”中。設所取的各種樹的個數依次爲 $t_i^{(1)}, t_i^{(2)}, \ldots, t_i^{(T_i)}$, 則第 i 類有根樹共有點 $i(t_i^{(1)} + t_i^{(2)} + \cdots + t_i^{(T_i)})$ 個。於是

$$\sum_{i=1}^{n} i(t_i^{(1)} + t_i^{(2)} + \cdots + t_i^{(T_i)}) = n。$$

按上述去掉根點的辦法, 每一個 $(n+1)$ 階有根樹對應於一組有根樹, 其個數分別爲

$$\begin{aligned}&t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \ldots, \\ &t_1^{(T_1)}, t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, \ldots, \\ &t_2^{(T_2)}, \ldots, t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \ldots, t_n^{(T_n)} \qquad (24)\end{aligned}$$

其中 $t_i^{(j)}$ 是 n 個點構成的有根樹中, 第 j 種 i 階有根樹的個數。注意到這些有根樹與次序無關, 故上述的對應是唯一的。

反之, 給出一組 (24), 我們添加一個新點 O 作爲根點, 把數組 (24) 所對應的有根樹的根點與 O 連結起來 (連結後, 只有 O 是根點)。由於與次序無關, 而僅與這些有根樹的種類多少有關, 故又唯一地對應一個 $n+1$ 階有根樹。

$$\begin{aligned}令\ S = \{(&t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \ldots, \\ &t_1^{(T_1)}, t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_2^{(T_2)}, \ldots, \\ &t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \ldots, t_n^{(T_n)}) \\ &| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{T_i} i t_i^{(j)} = n\}\end{aligned}$$

於是 S 就與所有 $(n+1)$ 階有根樹所成的集一一對應。即

$$|S| = T_{n+1}。$$

顯見, $|S|$ 就是方程 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{T_i} i t_i^{(j)} = n$ 的所有解 $((t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \ldots, t_1^{(T_1)}, t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_2^{(T_2)}, \ldots, t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \ldots, t_n^{(T_n)})$ 的個數。即

$$\begin{aligned}&(1 + x + x^2 + \cdots)^{T_1} \\ &\cdot (1 + x^2 + x^4 + \cdots)^{T_2} \cdots \\ &\cdot (1 + x^n + x^{2n} + \cdots)^{T_n}\end{aligned}$$

展開式中 x^n 項的係數, 也即 (由 $(*)$ 式)

$$(1-x)^{-T_1}(1-x^2)^{-T_2} \cdots (1-x^n)^{-T_n}$$

展式中 x^n 項的係數。由於把上式伸延成無窮乘積不影響展式中 x^n 項係數的值。於是,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-T_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |S| x^n = \sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1} x^n,$$

故

$$\begin{aligned}T(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} x^{n+1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} x^n = x \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-T_n}。\end{aligned}$$

這便是有根樹計數的 Cayley 公式 (23)。

上述證明並且無複雜的推導, 僅靠 $(*)$ 式和生成函數的思路。大數學家做出的結果, 我們也能行。

別瞧不起它, 那個中學教材中的公式。

—本文作者任教於中國華南師範大學數學系—

高斯 EUCLID 環的除式個數

宋秉信

摘要: 本文對高斯 EUCLID 環中一對元 $x, y \neq 0$ 的 EUCLID 除式的個數進行討論, 並得出其定理。
關鍵字: 歐氏環、整點、格點。

一、預備知識

(1) 若域 F 上的多項式環 $F[x]$ 是一個歐氏環, 那麼對於 $F[x]$ 中的任意兩個多項式 $f(x), g(x) \neq 0$, 在 $F[x]$ 中存在唯一的 $q(x), v(x)$, 使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), v(x) = 0;$$

或

$$\deg(g(x)) > \deg(v(x))。$$

就是說, 這種表達式是唯一的。

(2) 我們知道, 整數環是歐氏環中的一種, 而其中這種表達形式一般不會超過兩個。

(3) 高斯 EUCLID 環是整數環 $G = \{a+bi,\ a, b \in \mathbf{Z}\}$ 及其 $N(a+bi) = a^2+b^2$ 為 EUCLID 函數 EUCLID 環。

問題是高斯 EUCLID 環的這種表達形式有多少種, 即除式的個數有多少?

二、除式個數定理

我們把一對元 $x,y \neq 0$ 的除式個數記為 $P(x,y)$, 把以 (x_0,y_0) 為中心, 以1為半徑的圓內整點個數記為 $Q(x_0,y_0)$。

定理1: 設 (G,N) 是高斯 EUCLID 環,$\forall\ x = a + bi, y = c + di \in G = \{a + bi, a,b \in \mathbf{Z}\},y \neq 0$, 則 $P(x,y) = Q(x_0,y_0)$。

其中

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}, \quad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}$$

證明: $\forall x = a + bi,\ y = c + di \in G$。

根據歐氏環的定義, 存在 $\rho = e + fi$, $\lambda = g + hi \in G$, 使得 $x = ye + \lambda$, 此外 $\lambda = 0$ 或 $N(\lambda) < N(y)$。

$\because x-\lambda=ye$, 而

$x-\lambda=(a+bi)-(g+hi)=(a-g)+(b-h)i$

$ye=(c+di)(e+fi)=(ce-df)+(cf+de)i$

$\therefore a-g=ce-df, b-h=cf+de$。

現分別討論:

(1) 若存在 ρ, 使 $x=ye$, 則 $p(x,y)=1$。否則, 將還有 $x=ye_1+\lambda_1,\lambda_1=0$ 或 $N(\lambda_1)<N(y)$, 則 $y(\rho-\rho_1)=\lambda_1$。如果 $\lambda_1=0$, 但 $y\neq 0$, 那麼只有 $\rho=\rho_1$, 這時除式 $x=ye+\lambda$, 與 $x=y\rho$ 是一致的; 如果 $\lambda_1\neq 0$, 由於 $y\neq 0$, 所以 $\rho-\rho_1\neq 0$, 從而有 $N(\lambda_1)\geq N(y)$。這與 $N(\lambda_1)<N(y)$ 相矛盾。因此, 在這種情況下, $\lambda=0$, 即 $g=h=0$。從而有

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&-d\\d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}。$$

$\because N(y)=N(c+di)=c^2+d^2$,

$$\therefore \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}=\frac{1}{N(y)}\begin{pmatrix}c&d\\-d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{N(y)}\begin{pmatrix}ac+bd\\cb-ad\end{pmatrix},$$

由於 $e,f\in\mathbf{Z}$, 所以, 當 $N(y)$ 整除 $\begin{vmatrix}a&-b\\c&d\end{vmatrix}$ 與 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$ 時, x 與 y 有且僅有一個除式, 即 $P(x,y)=1$。

(2) 若 x 與 y 有兩個或兩個以上的除式, 此時 $\lambda=0$, 因爲

$$\begin{cases}g=a-ce+df\\h=b-cf-ae\\c^2+d^2>g^2+h^2\end{cases}$$

其中 e,f,g,h 均爲未知整數。

顯然, 它的一組整解 (e,f) 決定相應的整解 (g,h), 而 (e,f) 的整解數恰是 x 與 y 的除式個數。

將 $g=a-ce+df$, $h=b-cf-de$ 代入不等式 $c^2+d^2>g^2+h^2$, 化簡整理後, 便得

$$(c^2+d^2)(e^2+f^2)-2e(ac+bd)+2(ad-bc)f+(a^2+b^2)-(c^2+d^2)<0。$$

即

$$(c^2+d^2)\left[(e^2+f^2)-\frac{2e(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{2f(ad-bc)}{c^2+d^2}\right]+(a^2+b^2)-(c^2+d^2)<0,$$

即

$$N(y)\left[(e^2+f^2)-\frac{2e\begin{vmatrix}a&-b\\d&c\end{vmatrix}}{N(y)}+\frac{2f\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{N(y)}\right]+N(x)-N(y)<0$$

經配方, 得

$$\left[e-\frac{\begin{vmatrix}a&-b\\d&c\end{vmatrix}}{N(y)}\right]^2+\left[f+\frac{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{N(y)}\right]^2-\frac{\begin{vmatrix}a&-b\\d&c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}^2-N(x)N(y)+N^2(y)}{N^2(y)}<0。$$

由於

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}^2$$

$$= (ac+bd)^2 = a^2c^2+b^2d^2+2abcd$$

$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2)-a^2d^2-b^2c^2+2abcd$$

$$= N(x)N(y)-(ad-bc)^2$$

$$= N(x)N(y) - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2$$

代入上面不等式, 得

$$\left[e-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}\right]^2+\left[f+\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}\right]^2-1<0$$

$$令 x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}, \quad y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}。$$

$$\therefore (e-x_0)^2+(f-y_0)^2<1。$$

這就是說, x 除以 y 的商爲 $e+fi$, 則 (e,f) 在以 (x_o,y_o) 爲中心的單位圓內, 從而有

$$P(x,y) \le Q(x_o,y_o)。$$

反之, 若 (e,f) 是以 (x_o,y_o) 爲中心的單位圓內的任意整點, 不妨令 $g+hi=(a+bi)-(c+di)(e+fi)$, 由於

$$N(g+hi)$$

$$= N((a-ce+df)+(b-cf-de)i)$$

$$= (a-ce+df)^2+(b-de-cf)^2$$

$$= a^2+c^2e^2+d^2f^2-2ace+2adf-2cdef+b^2$$

$$+d^2e^2+c^2f^2$$

$$-2bde-2bcf+2cdef$$

$$= (a^2+b^2)+(c^2+d^2)(e^2+f^2)$$

$$-2(ac+bd)e+2(ad-bc)f$$

$$而\left[e-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}\right]^2+\left[f+\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}\right]^2-1<0$$

$$N(x)N(y) = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$= a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$$

$$= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

$$= \begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2$$

故有

$$\frac{N(\lambda)}{N(y)} = \frac{N(x)}{N(y)}+e^2+f^2$$

$$-\frac{2(ac+bd)e-2(ad-bc)f}{N(y)}$$

$$= \frac{N(x)}{N(y)}+\left[e-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}\right]^2$$

$$+\left[f+\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}\right]^2$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2}{N^2(y)}$$

$$= \frac{N(x)}{N(y)}+(e-x_0)^2+(f-y_0)^2$$

$$-\frac{N(x)N(y)}{N^2(y)}$$

$$= \frac{N(x)}{N(y)}+(e-x_0)^2+(f-y_0)^2$$

$$-\frac{N(x)}{N(y)}$$

$$= (e-x_0)^2+(f-y_0)^2<1。$$

所以有 $N(\lambda) < N(y)$。這就說明凡是以 (x_0,y_0) 爲中心的單位圓內的整點 (e,f) 相應的 $e+fi$ 是 x 除以 y 的一個商, 故有 $P(x,y) \ge Q(x_0,y_0)$。

綜上所述, 我們便證明了 $P(x,y)=Q(x_0,y_0)$。就是說, 高斯 EUCLID 環中一對

元 $x, y \neq 0$ 的 EUCLID 除式的個數等於以 (x_0, y_0) 爲中心的單位圓內的整點的個數。

定理2: 設 (G, N) 是高斯 EUCLID 環,

$$\forall x, y \in G, y \neq 0, P(x, y) \leq 4。$$

就是說, 高斯 EUCLID 環除式的個數不超過4個。

由於在單位圓內格點至多只有4個, 所以定理顯然是成立的。

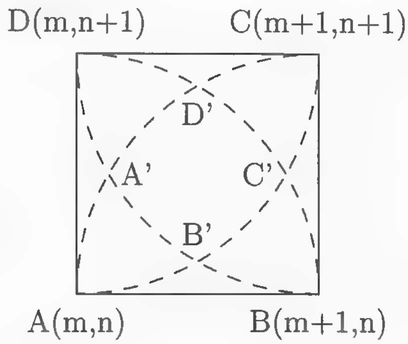
對於高斯 EUCLID 環中任意一對元 $x, y \in G$, $y \neq 0$, 有1-4個除式的情形分析如下:

1.$(x_0, y_0) \in I_1 = \{$ 格點正方形4個頂點 $\}$, $P(x, y) = 1$; 如圖所示。

2.$(x_0, y_0) \in I_2 = \{$ 曲線三角形 $A'AD$, $B'AB$,$C'BC$,$D'CD$ 上或內, 除去頂點 A,B,C,D 的點$\}$, $P(x, y) = 2$;

3.$(x_0, y_0) \in I_3 = \{$ 曲邊三角形 $AA'B', BB'C', CC'D', DD'A'$ 之內點及四條不包括端點在內的弧段 $\overset{\frown}{A'B'}$, $\overset{\frown}{B'C'}$,$\overset{\frown}{C'D'}$,$\overset{\frown}{D'A'}$ 上的點 $\}$,$P(x, y) = 3$;

4.$(x_0, y_0) \in I_4 = \{$ 曲線四邊形 $A'B'C'D'$ 的內點 $\}$,$P(x, y) = 4$。



參考資料

1. 吳品三著,「近世代數」北京高等教育出版社, 1979年12月。
2. 華羅庚著,「數論導引」北京科學出版社,1957年7月。

—本文作者任教於中國湖南省湘潭教育學院—

映射數列問題

張忠輔 • 楊世明

設 T 爲自然數集 $N \to N$ 的映射。任給 $n_0 \in N$, 連續施行疊代: $T(n_0) = n_1$, $T(n_1) = n_2, \ldots$, 一般地, $T(n_{k-1}) = n_k \in N$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ 則數列

$$n_0, n_1, \ldots, n_k, \ldots \tag{1}$$

就叫做 映射數列, 這種數列常呈現某種奇妙的性質, 如週期性等等。

易見, T 是 N 上的一個二元關係。考慮 N 的一個子集 N', 滿足: $m \in N' \Rightarrow T^{(m)} \in N'$ (即 N' 關於 T 封閉)。我們約定, 如果 $T(m) = n$, 則由 m 到 n 以有向弧 (m, n) 連接, 那麼就構成圖 (N', T), 該圖也稱爲數列 (1) 的圖論表示。不難知道, 數列 (1) 的性質與圖 (N', T) 的性質是相互對應的。

對 (1) 來說, 如存在一個非負整數 k 和一個最小的自然數 ℓ, 使得

$$T(n_k) = n_{k+1},$$
$$T(n_{k+1}) = n_{k+2}, \ldots,$$
$$T(n_{k+\ell-1}) = n_k$$

(即 $n_{k+\ell} = n_k$), 則 (1) 稱爲 週期數列, ℓ 叫做 週期, $\{n_k, n_{k+1}, \ldots, n_{k+\ell-1}\}$稱爲一個 週期節 (也叫循環節), 一個 週期節 在圖 (N', T) 中將形成一個圈 (稱爲 洞, 以週長 ℓ 表示其大小)。

按“鴿洞原理”, 數列 (1) 爲週期數列的一個顯然的充分條件是 $\{n_k\}$ 有界。由此不難證明: 如果數列 $\{n_k\}$ 自某項以後位數不增, 則它必爲週期數列。

關於數列 (1) 成爲週期數列的條件問題, 已有若干工作, 但至今未能較具體地解決如下問題:

whc1: 數列 (1) 爲週期數列的條件是什麼? (這裡,whc 表示問題或猜想, 下同)

1. 數碼方冪和問題

以 $T(n)$ 表示 n (在10進制下) 各位數碼的 m ($m \in N$) 次方之和。當 $m = 1$ 時, $T(n)$ 即爲 n 的數碼和, 容易證明, 這時, 在有限步內, 數列 (1) 必進入週期節 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$ 或 $\{9\}$。我們考慮 $m = 2$ 的情形, 即數碼平方和問題。先看兩個例子:

取 $n_0 = 9331$, 則 (1) 成爲:

$$9931, 100, 1, 1, 1, \ldots$$

取 $n_0 = 2986$, 則 (1) 成爲:

$$2986, 185, 90, 81, 65, 61,$$
$$37, 58, 89, , 145, 42,$$
$$20, 4, 16, 37, 58, \ldots.$$

它們都是週期數列, 週期分別爲1和8。一般地, 有如下結論:

設 $T(n)$ 表 n ($n \in N$) 在10進制下各個數碼的平方和, 則數列 $\{n_k\}$ 有如下兩條性質之一:

1° 存在 $k_0 \in N$, 使得當 $k \geq k_0$ 時, $n_k = 1$;

2° 存在 $k_0 \in N$, 使得當 $k \geq k_0$ 時, $n_k \in M = \{37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16\}$。

爲了證明, 設 $n_0 = \sum_{i=1}^{t} 10^{i-1} a_i$ (a_i 爲數碼 $0, 1, \ldots, 8$ 或 9)。則 $n_1 = T(n_0) = \sum_{i=1}^{t} a_i^2$, 於是

$$n_0 - n_1 = \sum_{i=2}^{t} (10^{i-1} - a_i) a_i - (a_1 - 1) a_1$$

因 $0 \leq a_i \leq 9$, 則 $(a_1 - 1)a_1 \leq 72$, 當 $t \geq 3$ 時, 如 $a_t \neq 0$, 則 $(10^{t-1} - a_t)a_t \geq 99$, 且對 $i = 2, 3, \ldots, t-1$, $(10^{i-1} - a_i)a_i \geq 0$。因此, 當 $t \geq 3$時, $n_0 - n_1 > 0$, 即

$$n_1 < n_0$$

這就說明, 只要 n_0 爲三位或三位以上的數, 求數碼平方和後, 就會減小。同樣, 如 n_1 仍是不低於三位的數, 那末 $n_2 < n_1, \ldots$, 因此在有限步之後必成爲一位或二位數 (當然, 可能再變爲三位數, 但不會再超過三位), 接前述判別準則, 知 $\{n_k\}$ 當爲週期數列。而且, 爲了具體地找出週期節, 僅考慮一、二位數就可以了。

設 $n_p = 10b_2 + b_1$, 則 $n_{p+1} = b_1^2 + b_2^2$, 作出數列

$$n_p, n_{p+1}, n_{p+2}, \ldots, n_{p+s}, \ldots$$

的圖論表示 (圖1-1), 它是圖 (N, T) 的一部分 (“根”部)。

此圖說明, 由不超過兩位的數 n_p 出發, 通過最多 9 次疊代, 即進入 $\{1\}$ 或 M。從而結論成立。

記 $T^1(n) = T(n)$; $T^2(n) = T(T^1(n))$, $\ldots, T^k(n) = T(T^{k-1}(n)), \ldots$, 對任意的 $n \in N$, 上面已證明, 當 $m = 2$ 時, 存在最小的非負數 $k_0(n) = k_0$, 使 $T^{k_0}(n) = 1$ 或 $T^{k_0}(n) \in M$ (我們稱這個 k_0 爲 n 關於 T 的到 M 或 $\{1\}$ 的路程。那麼我們問:

whc2: 能否求出 $k_0(n)$ 的解析式? n 滿足什麼條件時, 有 $T^{k_0}(n) \in \{1\}$ (或 M)?

對 $n = \sum_{i=0}^{t} 10^i a_i, a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, 設 $T(n) = \sum_{i=0}^{t} a_i^m (m \in N)$, 上海市一位中學生戚淳昊1988年曾研究過此問題。並找到了當 $m = 3$ 時, (N, T) 中的七個圈:

$$\{1\}, \{153\}, \{370\}, \{371\}, \{407\}$$
$$\{55, 250, 133\}, \{160, 217, 352\}$$

1992年4月, 馮躍峰認爲應存在九個圈, 另外兩個是

$$\{919, 1459\}, \{136, 244\}$$

當 $m = 4$ 時, 他找到了兩個圈

$$\{1\}, \{1138, 4179, 9219,$$
$$13139, 6725, 4338, 4514\}$$

在一般情形下, 圖 (N, T) 是否一定有圈? 對此, 馮證明了如下

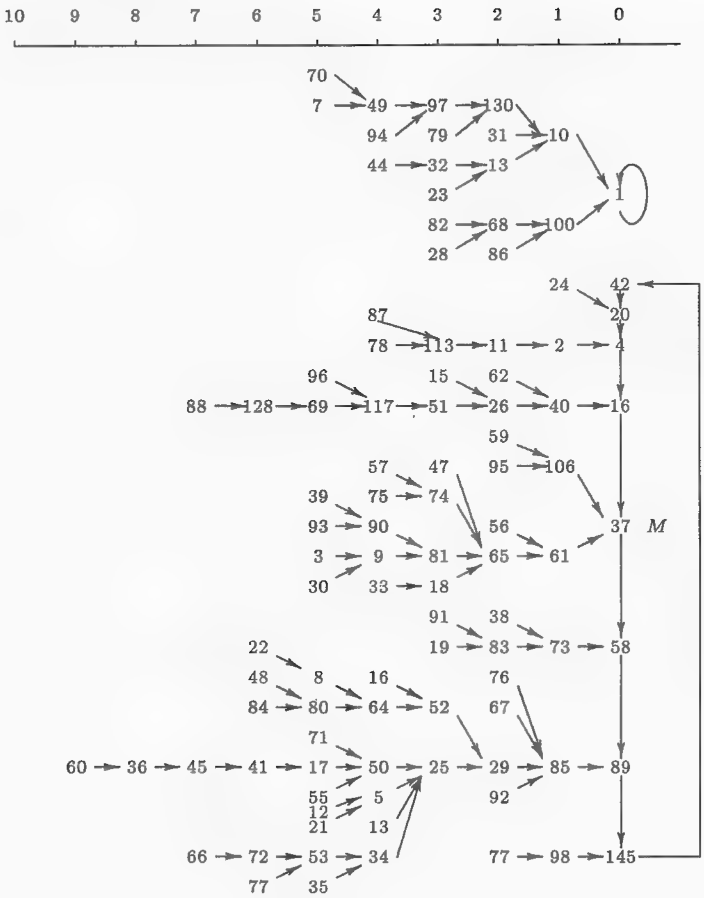


圖 $1-1$

定理1-1: 對任何 $n \in N$, $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_t \cdot 10^t$, (其中 $a_0, a_1, \ldots, a_t$ 爲數碼, $a_t \neq 0$), 設 $T(n) = a_0^m + \cdots + a_t^m$ $(m \in N)$, 則 (1) 必爲週期數列, 即圖 (N, T) 中必有圈。

只須證明存在 n_0, 當 $n > n_0$ 時, $T(n)$ 位數不增即可。事實上, 可證更強的結果: 當 $n > n_0$ 時, $T(n) \leq n$。爲此, 考察

$$n - T(n) = \sum_{i=0}^{t}(10^i a_i - a_i^m)$$
$$= \sum_{i=0}^{t} a_i(10^i - a_i^{m-1})$$

構造函數

$$f(x) = x(10^t - x^{m-1}) \ (0 \leq x \leq 9)$$

則

$$f'(x) = 10^t - m x^{m-1} \geq 10^t - m \cdot 9^{m-1}$$

設 $m \cdot 9^{m-1}$爲 k 位數, 取 $n_0 = \max(10^k, 10^m)$, 由於 $a_t \neq 0$, 則當 $n > n_0$ 時, $t \geq \max(k, m)$, 於是

$$f'(x) \geq 10^t - m \cdot 9^{m-1} > 0$$

從而 $f(x)$ 在 [0,9] 上單調遞增, 而 $1 \leq a_t \leq 9$, 故 $f(a_t) \geq f(1)$ 即

$$a_t(10^t - a_t^{m-1}) \geq 1 \cdot (10^t - 1) \geq 10^k - 1$$

再由 $t \geq m$, 得

$$
\begin{aligned}
& n-T(n) \\
= & a_t(10^t-a_t^{m-1})+a_{t-1}(10^{t-1}-a_{t-1}^{m-1}) \\
& +\cdots+a_{m-1}(10^{m-1}-a_{m-1}^{m-1}) \\
& +a_{m-2}(10^{m-2}-a_{m-2}^{m-1})+\cdots \\
& +a_1(10-a_1^{m-1})+a_0(1-a_0^{m-1}) \\
\geq & a_t(10^t-a_t^{m-1})+a_{m-2}(10^{m-2}-a_{m-2}^{m-1}) \\
& +\cdots+a_1(10-a_1^{m-1})+a_0(1-a_0^{m-1}) \\
\geq & 10^k-1+9(0-9^{m-1})(m-1) \\
\geq & 10^k-1-m\cdot 9^m \geq 0
\end{aligned}
$$

(最後一步是因爲: $m \cdot 9^m$ 爲 k 位數, 而 10^k-1 爲 k 位數中最大的)。所以當 $n > n_0$ 時, $T(n) \leq n$ 。證畢。

由證明過程可見:

1) n_0的理論值估得比較大, 實際上開始進入週期要早得多, 即非週期部分的項數比 n_0 小得多。

2) 設 $p \in N$, $p \geq 2$, $n = \sum_{i=0}^t a_i p^i$, $a_i \in \{0,1,\ldots,p-1\}$, $T(n) = \sum_{i=0}^t a_i^m$ $(m \in N)$, 則上述證明對圖 (N,T) 是完全適用的, 即可完全類似地證明圖 (N,T) 中必有圈。

根據 $m = 1,2,3,4$ 的結果, 對 $p = 10$, 馮躍峰猜想:

當 m 爲奇數時, (N,T) 中有9個圈; 當 m 爲偶數時, (N,T) 中有2個圈。

1993年5月, 江蘇沭陽的張延衛找到 $m = 4$ 時 (N,T) 中的6個圈, 從而否定了馮猜想; 但還未弄清。

whc3: 對 $p = 10$ 和 $m \in N$, 圖 (N,T) 中有多少個圈? 怎樣構造這些圈? 大小如何? 還有什麼規律和性質?

whc4: 在 $p(p \in N, p \neq 1)$ 進制下, 圖 (N,T) 有幾個圈? 圈數同 p 有何關係? 怎樣構造這些圈?

whc5: (自然數數碼和的方冪問題) 設 $m \geq 2$ 爲自然數, 對 $p \in N$, $p \geq 2$, $n = \sum_{i=0}^t a_i p^i$, 設 $T(n) = (\sum_{i=0}^t a_i)^m$, 考慮數列 (1) 和圖 (N,T) 的性質及其與方冪和問題之間的關係。

2. $(3n+1)$ 問題

漢堡大學的庫拉茲 (Collatz)1985年底發表一篇文章, 談到他早在1928-1933年期間想到的一個問題,1952年後逐漸傳播出去的情形。到八十年代初, 已有若干工作。此問題由於表述簡明, 又有難度, 激起不少人的興趣。庫拉茲本人稱爲 “$(3n+1)$ 問題”, 有文獻稱爲“庫接茲問題”, 日本人稱爲“角谷猜想”, 問題至今尚未解決。

whc6: ($(3n+1)$ 問題) 對任一自然數 $n \geq 2$, 反復施行運算: 若 n 爲奇數, 乘以3再加1; 若 n 爲偶數, 則除以2, 那末計算到最後, 總得1。

米田信夫對7000億以內的數進行驗算, 結果都對。如果對 $n \in N$, 取

$$
T(n) = \begin{cases} 1, 若n=1, \\ \frac{n}{2}, 若n=2k, k \in N, \\ 3n+1, 若n=2k+1, k \in N. \end{cases}
$$

那麼就是要證明: 對任意 $n_0 \in N$, 數列 (1) 成爲

$$n_0, n_1, \ldots, n_t, 1.1, 1, \ldots \quad (2)$$

(t 爲非負整數), 如稱滿足 (2) 的自然 n_0 爲 庫拉茲數, 全部庫拉茲數構成的集合記作 N_c, 那末 $(3n+1)$ 問題就是要證明。

whc6′: $N_c = N$。

我們有 $1 \in N_c$, $2^k \in N_c (k \in N)$, 而且由於對 $k \in N$, 有 $T^k(2^k m) = m$, 則有

定理1-2: $m \in N_c \Rightarrow 2^k m \in N_c (k \in N)$。

將 $T(n)$ 分別記爲 $T_0(1) = 1$, $T_1(2m) = m$, $T_2(2m+1) = 3(2m+1)+1$, 則易證如下的

定理1-3: $m \in N_c \Leftrightarrow$ 存在 $k \in N$, 對 $m \in N$ 施行若干次運算 T_1, T_2 後化爲 2^k。

充分性是顯然的, 現證必要性: 設 $m \in N_c$, 則按定義:

$$T_1^k T_2 T_1^{k_\ell} T_2 T_1^{k_{\ell-1}} T_2 \cdots T_2 T_1^{k_1}(m) = 1 \quad (3)$$

其中, $k, k_\ell, \ldots, k_2 \in N$, k_1 爲非負整數 (約定 $T_1^0(m) = m$)。但只有 $T_1^k(2^k) = 1$, 因此由 (3) 知 $T_2 T_1^{k_\ell} T_2 \cdots T_2 T_1^{k_1}(m) = 2^k$。

由定義可直接推出

定理1-4: $n \in N_c \Rightarrow T(n) \in N_c$。

我們來考慮 (無限有向) 圖 (N, T), 由於除1以外, 奇數僅是 $T_1(n)$ 的結果, 因此, 奇數頂點的出入次數都是1, 偶數頂點的出次數爲1, 但 λ 次數可以爲2(當且僅當 $2m \equiv 1 \pmod 3$) 時, 頂點 $2m$ 的 λ 次數爲 2), 在圖1-2中, 畫的是圖 (N, T) 的一部分。

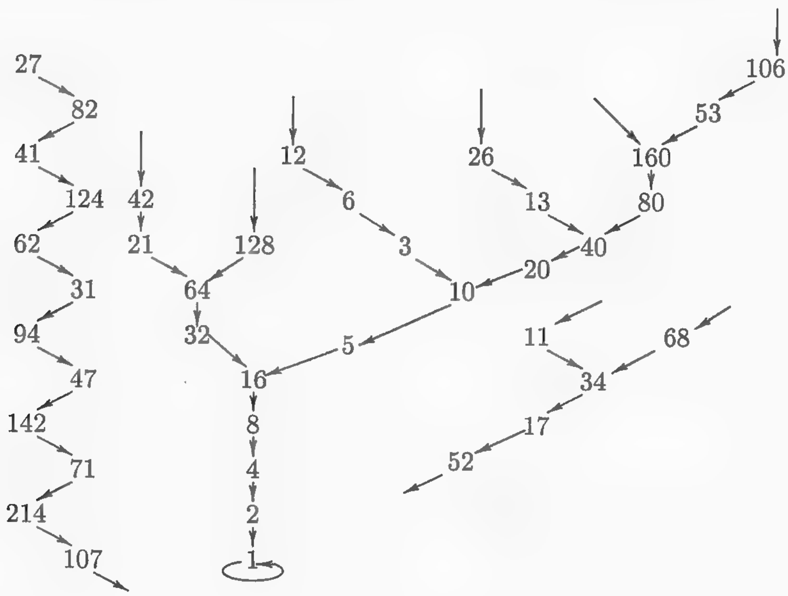


圖 1 – 2

如果其中沒有圈和指向無窮的分支 (圖 1-3), 它就是一個"向根"樹, 樹的根部是 1, 那麼 whc6′成立。而如果它是連通的, 就不會有圈或伸向無窮的分支, 否則就會出現如圖 1-3 所示的分叉點 A, 其出現次數爲 2, 這同 $T(n)$ 爲映射相矛盾。而沒圈和無窮分支且連通的圖即爲"向根"樹。因此, $(3n+1)$ 問題等價於

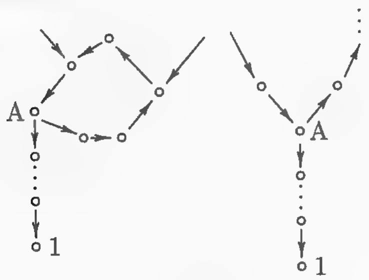


圖 1 − 3

whc6″: 圖 (N,T) 是連通的。

設 $m \in N_c$ 滿足關係式 (3), 則 m 稱爲 ℓ 次 庫拉茲數; 比如 $g_0(k)=2^k(k=0,1,2,\ldots)$ 爲零次庫拉茲數; 對於 $t \in N$ 和非負整數 k,

$$g_1(k,t)=2^k(4^t+4^{t-1}+\cdots+4+1)$$

爲 1 次庫拉茲數; 由圖 1-2 可見,26,13 等爲 2 次庫拉茲數。不難驗證,11 爲 4 次的, 而 27 爲 41 次庫拉茲數。

whc7: $\ell(\ell=2,3,4,\ldots)$次庫拉茲數的解析式是什麼?

1994年9月, 福州的林世保獲得如下結果:

1) 對 $\ell \in N$ 和非負整數 $k_i(i=1,2,\ldots,\ell)$ 使得

$$g_\ell=\frac{1}{3^\ell}(2^{k_1+\cdots+k_\ell}-3^{\ell-1}-3^{\ell-2}\cdot 2^{k_1}-3^{\ell-3}\cdot 2^{k_1+k_2}-\cdots-2^{k_1+\cdots+k_{\ell-1}})$$

爲正整數, 則 g_ℓ 是 ℓ 次庫拉茲數。事實上, 這不過是方程 (3) 求解的結果, 例如, 二次(奇) 庫拉茲數的表達式爲

$$g_2=\frac{1}{9}[2^{2k}(2^{6k_1+2}-1)-3]\text{或}$$

$$g_2=\frac{1}{9}[2^{2k+1}(2^{6k_1+4}-1)-3]$$

2) 當 $g_\ell \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$ 時, $g_\ell g_1+\frac{g_\ell-1}{3}$ 是 $\ell+1$ 次庫拉茲數; 當 $g_2 \equiv 2 (\operatorname{mod} 3)$ 時, $2g_\ell g_1+\frac{2g_\ell-1}{3}$ 是 $\ell+1$ 次庫拉茲數。

3) $4g_\ell+1$ 也是庫拉茲數。

3. $(3n+1)$ 問題的推廣

早在 1987 年, 安徽一位數學教師對 $(3n+1)$ 問題就做了系統的推廣,1990年五月,「自然雜誌」在發表他的文章的同時, 通過"編者按"評價說:

> "「角谷猜想的推廣」雖出自一位業餘數學愛好者之手, 但猜想有據, 推斷有理, 顯示出一定的數學功底。本刊特予刊載, 若有朝一日誰能沿著該文的思路一舉解決了角谷猜想, 千萬不要忘記了這位在艱苦條件下勤奮自學的業餘愛好者呵!"

一個尚未解決的問題或猜想, 再"推廣"有什麼意義嗎? 希爾伯特說:

"在解決一個問題時, 如果我們沒有獲得成功, 原因常常在於我們沒有認識到更一般的觀點, 即眼下要解決的問題不過是一連串有關問題中的一個環節。採取這樣的觀點之後, 不僅我們所研究的問題會容易得到解決, 同時還會獲得一種能用於相關問題的普通方法。"

張對 $(3n+1)$ 問題的推廣, 正是給出了一連串有關的問題和這類問題的一般觀點, 從而使問題表現出更明顯的規律性, 特別顯示出問題不僅同兩個素數 2 和 3 有關, 而是同整個素數數列密切聯繫, 從而揭示出問題的深刻意義。

如果把 $(3n+1)$ 問題 (**whc 6**) 叫做猜想1, 作代換 $1 \to 3^k$ (k 爲非負整數) 就得

猜想 $1'$ ($(3n+3^k)$ 問題): 設 k 爲給定的非負整數, 對任一自然數 m,

(1) 若 m 爲偶數, 則用 2 除 m;

(2) 若 m 爲奇數, 則用 3 乘 m 再加 3^k。

對上述運算結果行上述運算, 則經有限次後, 總得 3^k。

猜想 2 ($(5n+1)$ 問題): 對任一自然數 m,

(1) 若 $2 \mid m$ 或 $3 \mid m$, 則用 2 或 3 除 m;

(2) 若 $2 \nmid m$ 且 $3 \nmid m$, 則用 5 乘 m 再加1,

對上述運算結果再行上述運算, 有限次後總爲1。

在 $(5n+1)$ 問題中, 作代換 $1 \to 5^k$ ($k \in \overline{Z^-}$), 其他不變, 則得

猜想 $2'$: $(5n+5^k)$ 問題。

猜想 3 ($(7n+1)$ 問題): 對任一自然數 m,

(1) 若 $2 \mid m$ 或 $3 \mid m$ 或 $5 \mid m$, 則用 2, 3或5除 m;

(2) 若 2, 3, 5 均不能整除 m, 則用7乘 m 再加1,

對上述運算結果再行上述運算, 有限次後必得 1。

在猜想 3 中作代換 $1 \to 7^k$ ($k \in \overline{Z^-}$) 得

猜想$3'$: $(7n+7^k)$ 問題。

猜想 4 ($(11n+1)$ 問題): 對任一自然數 m,

(1) 若2,3,5,7中至少一個整除 m, 則用它去除 m;

(2) 若2,3,5,7均不能整除 m, 則用11乘 m 再加1。

對上述運算結果再行上述運算, 則經有限次後, 結果或爲1, 或出現循環"17-47-37-17"。

如果記 $\psi_1 = \{1\}$, $\psi_2 = \{17, 47, 37\}$, 則上述猜想結論可說成: "$\cdots$ 經有限次後, 結果或屬於 ψ_1, 或屬於 ψ_2"。記 $\psi_1' = \{11^k\}$, $\psi_2' = \{17\times 11^k, 47\times 11^k, 37\times 11^k\}$ ($k \in \overline{Z^-}$) 在猜想4中作代換 $1 \to 11^k$, $\psi_1 \to \psi_1', \psi_2 \to \psi_2'$, 則有

猜想 4′: $(11n + 11^k)$ 問題。

由以上不難看出, 猜想 $1-4$ 分別爲猜想 $1'-4'$ 當 $k=0$ 時的特殊情形。意味深長的是, 有

定理1-5: 如果猜想 $1-4$ 成立, 則猜想 $1'-4'$ 也成立。

我們僅證: 如4成立, 則 $4'$ 成立。

對給定的非負整數 k, 設從某自然數 m_0 開始, 施行猜想 $4'$ 運算過程:

$$m_0 \to m_1 \to m_2 \to \cdots \to m_i \to \cdots$$

其中 m_i 是由 $11m_{i-1} + 11^k$ 中約去素因子 2,3,5,7而得, 用 F_i 表示約去的所有素因子的和, 則

$$11m_{i-1} + 11^k = F_i m_i$$

再設 $m_i = 11^{\ell} n_i$, $11 \nmid n_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ 下面分兩種情形討論:

若 $\ell_0 \geq k$, 則 $11m_0 + 11^k = 11^{\ell_0+1} n_0 + 11^k = 11^k(11^{\ell_0-k+1} + 1) = F_1 m_1 = 11^{\ell_1} n_1 F_1$。由素因子分解唯一性定理, 知 $\ell_1 = k$, 同樣可證 $\ell_2 = \ell_3 = \cdots = k$;

若 $\ell_0 < k$, 則 $11m_0 + 11^k = 11^{\ell_0+1} n_0 + 11^k = 11^{\ell_0+1}(n_0 + 11^{k-\ell_0+1}) = F_1 m_1 = 11^{\ell_1} n_1 F_1$。因 $11 \nmid n_1 F_1$, 故 $\ell_1 \geq \ell_0 + 1$; 如仍有 $\ell_1 < k$, 則同樣可得 $\ell_2 \geq \ell_1 + 1$, 如此下去, 因 k 爲有限數, 故必有某 t, 使 $\ell_t \geq k$。

綜合上述兩種情形, 必有某 t, 使 $\ell_t = \ell_{t+1} = \cdots = k$, 於是

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= (11m_t + 11^k)/F_{t+1} \\ &= (11^{k+1} n_t + 11^k)/F_{t+1} \\ &= 11^k(11n_t + 1)/F_{t+1}, \\ m_{t+2} &= 11^k(11n_{t+1} + 1)/F_{t+2}, \\ m_{t+3} &= 11^k(11n_{t+2} + 1)/F_{t+3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

把這運算過程中每個 m_i 除去因子 11^k, 正是從 n_t 起, 按猜想4的規定施行運算的過程, 由於假定猜想4成立, 它最後結果屬於 ψ_1 或 ψ_2; 由 ψ_1', ψ_2' 的定義可知, 猜想 $4'$ 成立。

由於這種等價性, 猜想 i' 可不再考慮; 於是有一般性的

猜想 5 ($(p_s n + 1)$ 問題): 設 $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, p_3, $p_4, \ldots$ 爲連續的素數數列, $s \geq 2$ 爲給定的自然數, $m \in N$,

(1) 若 $p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}$ 中有能整除 m 的, 則用它去除 m; (2) 若 $p_i \nmid m (i = 1, \ldots, s-1)$, 則用 p_s 乘 m 再加1。

對上述運算結果再行上述運算, 最後結果必形成有限個循環 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\ell$, 且 $\psi_1 = \{1\}$。

whc8: 證明或推翻上述猜想。如果猜想得到證明, 則對給定的 $s \in N$, $s \geq 2$, 試進一步確定 ℓ 及 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\ell$。

上述猜想是建立在連續素數數列基礎上的, 問題在於, 對單個的素數或任意排列的素數列, 將會有什麼樣的結果? 對單個素數,1991年3月, 張煥明給出了一個猜想:

whc 設 m 爲自然數,

(1) 若 $m = 3k$ $(k \in N)$, 則用3除 m;

(2) 若 $m=3k+1$ $(k\in N)$, 則用4乘 m 再減去1;

(3) 若 $m=3k-1$ $(k\in N)$, 則用4乘 m 再加上1,

對上述運算結果再行上述運算, 經有限次後, 結果總爲1。

這結果正確嗎? 能否進行系列推廣?

1985年拉嘎利斯 (C. Lagarias) 著文「$3x+1$ 問題及其推廣」(The American Mathematical Monthly, Jan, 1985) 概述了其研究情況, 引進了"停止時間函數"等概念, 但很少實質性進展, 唯揭示其同遍歷理論之聯繫, 頗有啓發性, 這就要整數集上定義映射 $T:Z\to Z$:

$$T(\alpha)=\begin{cases}\frac{\alpha}{2}, & \alpha\equiv 0(\text{mod } 2)\\ \frac{3\alpha+1}{2}, & \alpha\equiv 1(\text{mod } 2)\end{cases}$$

然後再加以擴充。

4. 黑洞數問題

對任一個數字不全相同的三位數, 如207, 施行重排求差運算 T: 把數字重排, 用所得最大數減去最小數, 對結果再行同樣運算, 最終必得495, 即

$$207\xrightarrow{T:720\text{-}027}693\xrightarrow{T:963\text{-}369}594\xrightarrow{T:954\text{-}459}495\xrightarrow{T:954\text{-}459}495\cdots$$

再換一個, 也是如此。

這可作出一般的證明: 取 $n=\overline{b_3b_2b_1}$, 不妨設 $b_3\geq b_2\geq b_1$, $b_3\neq b_1$, 則

$$\begin{aligned}T(n)&=\overline{b_3b_2b_1}-\overline{b_1b_2b_3}\\&=\overline{(b_3-b_1-1)9(10+b_1-b_3)}\end{aligned}$$

$T(n)$ 的10位數字是9, 首末位數字的和也是 $(b_3-b_1-1)+(10+b_1-b_3)=9$。因而, 只要對990,891,792,693,594 加以驗證就可以了, 結果爲:

$$990\xrightarrow{T}891\xrightarrow{T}792\xrightarrow{T}693\xrightarrow{T}594\xrightarrow{T}495$$

一般地, 設 N_m 表示由 m 個不屬相同的數字排成的自然數 (10進制數, 包括前面若干位爲0的數如0012$\cdots$7) 的集合 (事實上, N_m 爲不超過 m 位但數字不全相同的數的集合), $T(n)$ 表示將 n $(n\in N_m)$ 的數字重排, 用所得最大數減去最小數的差 (稱爲重排求差), 我們來考查圖 (N_m,T) 的有趣性質。

如果存在不同的數 $n_1,n_2,\ldots,n_k\in N_m$, 使

$$T(n_1)=n_2, T(n_2)=n_3,\ldots,$$
$$T(n_{k-1})=n_k, T(n_k)=n_1,$$

則 $(n_1,\ldots,n_k)$ 形成圖 (N_m,T) 中一個圈, 也叫做一個黑洞, $n_1,n_2,\ldots,n_k$ 稱爲 N_m (或 m 位) 的 一組黑洞數, k 表明了黑洞的大小, 叫做 週長。

由定義知, $N_1=\phi$, 上已證明

定理1-6: 圖 (N_3,T) 中恰有一個黑洞 (495)。

有文獻說, 印度數學家們研究過所謂"陷阱數", 且證明了四位陷阱數爲6174, 即

定理1-7: 圖 (N_4,T) 中恰有一個黑洞 (6174)。

(N_2, T) 如何? 容易證明。

定理1-8: 圖 (N_2, T) 中恰有一個週長 $k=5$ 的黑洞 (09,81,63,27,45)

在圖1-4中給出的是一個完全歸納的證明。

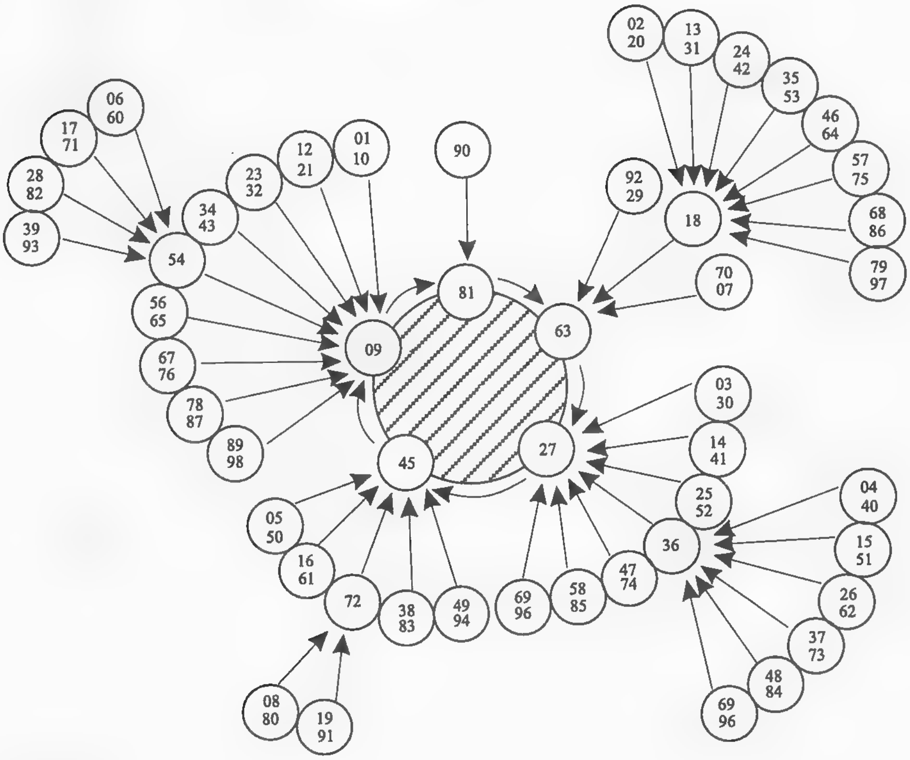


圖 1 − 4

仔細觀察這個圖, 不難發現 (N_2, T) 構造上的一些特點。

易見, 若 $n \in N_m$, 則 $T(n) \in N_m$; $n_1, n_2 \in N_m$, 但只有數字排列不同, 則 $T(n_1) = T(n_2)$; 由於 N_m 中元素個數是有限的 ($|N_m| = 10^m - 10$), 運算 T 卻可無限進行下去, 因此有如下

定理1-9 (*黑洞存在定理*): 對任何 $m \in N$, $m \geq 2$, m 位黑洞數存在, 即圖 (N_m, T) 中必有黑洞。

黑洞乃是 N_m 中對 T 封閉的子集, 且具有“只入不出”的性質, 同宇宙黑洞有某些類似, 其名亦由此而得, 現已找到:

(N_s, T) 中的三個黑洞 (僅列其中一個數):

$$(63954, \ldots)(k=4),$$

$$(62964, \ldots)(k=4)$$

$$(53955, \ldots)(k=2)$$

(N_6, T)中三個黑洞

$$(642654, \ldots)(k=7),$$

$(6317464, \ldots)(k=7)$

$(549945, \ldots)(k=7)$

(N_7, T) 中的一個黑洞: $(8719722, \ldots)$ $(k=8)$。

(N_8, T) 中的四個黑洞:

$(63317664)(k=1)$,

$(97508421)(k=1)$

$(83208762, \ldots)(k=3)$,

$(86308632, \ldots)(k=7)$

(N_9, T) 中的三個黑洞:

$(864197532)(k=1)$,

$(554999445)(k=1)$

$(865296432, \ldots)(k=14)$

whc10: 對於自然數 $m \geq 5$, 設圖 (N_m, T) 中共 L_m 個黑洞, 則 $L_m =$? 這些黑洞的週長各是多少? 怎樣具體地構造這些黑洞?

設 $n \in N_m$, 則 $T(n)$ 各位數字之和爲9的倍數, 還知道它的一些數字結構特徵, 但尙不知:

whc11: $n \in N_m$ 是黑洞數的充分必要條件 (除了定義) 是甚麼?

若 $n \in N_m$ 不是黑洞數, 且 $T(n) = n_1$, $T(n_1) = n_2, \ldots, T(n_{d-1}) = n_d$, 且 $n_1, \ldots, n_{d-1}$ 都不是黑洞數, n_d 是黑洞數, 則 $h_m(n) = d$ 叫做 黑程 (相當於數列 (1) 中非循環部分的項數); 若 n 是黑洞數, 約定 $h_m(n) = 0$。

怎樣求 $h_m(n)$? 它有解析式嗎?

自1993年以來, 人們發現了黑洞數的不少衍生規律, 但對上述幾個問題的研究, 無實質性進展。

whc12: 設 $p \in N$, $p \geq 2$, 試在 p 進制下考慮相應的黑洞數問題。

爲了簡化 N_m 中黑洞的研究, 岳陽的李抗強提出一種方法即“特徵數法”:

設 $n \in N_m$, 將其數字由大到小排列爲 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ $(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_m)$, 命 $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{m-i+1}$ $(i = 2, 3, \ldots, [\frac{m}{2}])$, 則稱 $\bar{n} = \beta_1\beta_2\cdots\beta_{[m/2]}0\cdots0$ 爲 n 的特徵數 (由 $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_m$ 知 $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_{[m/2]}$)。$\bar{n}(n \in N_m)$ 的集合記爲 $\overline{N}_m$, 則 $\overline{N}_m \subset N_m$, $\overline{N}_m$ 中共有 $C_{9+[m/2]}^{[m/2]} - 1$ 個元素, 比 N_m 少得多, 特徵數有如下性質:

i) 若 $n \in N_m$, 則 $T(n) = T(\bar{n})$;

ii) 若 $n_1, n_2 \in N_m$, 則 $T(n_1) = T(n_2) \Leftrightarrow \overline{n_1} = \overline{n_2}$。

對 $\bar{n} \in \overline{N_m}$, 我們定義 $\overline{T}(\bar{n}) = \overline{T(n)}$, 則 $\overline{T}$ 稱爲 T 在 $\overline{N}_m$ 中的共軛運算, 那麼 $\overline{T}$ 在 $\overline{N}_m$ 中是封閉的, 因此它是 $\overline{N}_m$ 中的二元關係, 從而可構造圖 $(\overline{N}_m, \overline{T})$。可以證明:

定理 1-10: (N_m, T) 中的黑洞可與 $(\overline{N}_m, \overline{T})$ 中的黑洞建立一一對應關係, 且對應黑洞週長相等。

略證如下:

設 $(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_k)$ 爲 $(\overline{N}_m, \overline{T})$ 中一個黑洞, 則

$$\overline{T}(\bar{n}_1) = \bar{n}_2, \overline{T}(\bar{n}_2) = \bar{n}_3, \ldots, \overline{T}(\bar{n}_k) = \bar{n}_1$$

於是

$$T(\overline{T}(\bar{n}_1)) = T(\bar{n}_2), \ldots, T(\overline{T}(\bar{n}_k)) = T(\bar{n}_1)$$

由性質 i) 及 $\overline{T}$ 的定義:

$$\begin{aligned} T(\overline{T}(\overline{n})) &= T(\overline{T}(n)) \text{ (定義)} \\ &= T(T(n)) \text{ (性質 i)} \\ &= T(T(\overline{n})) \text{ (性質 i)} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &T(T(\overline{n}_1)) = T(\overline{T}(\overline{T}(\overline{n}_1)) = T(\overline{n}_2), \\ &T(T(\overline{n}_2)) = T(\overline{n}_3), \\ &\qquad\qquad \cdots T(T(\overline{n}_k)) = T(\overline{n}_1) \end{aligned}$$

這說明 $(T(\overline{n}_1), \ldots, T(\overline{n}_k))$ 爲 (N_m, T) 中一個黑洞, 即

$$F: (\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \to (T(\overline{n}_1), \ldots, T(\overline{n}_k))$$

爲 $(\overline{N}_m, \overline{T})$ 中黑洞集合 $\overline{H}_m$ 到 (N_m, T) 中黑洞集合 H_m 的一個映射。由性質 i),ii) 知, $\overline{H}_m$ 中的不同黑洞映射到 H_m 中的不同黑洞, 即 F 爲單射。

設 $(n_1, \ldots, n_k) \in H_m$, 則 $T(n_1) = n_2, \ldots, T(n_k) = n_1$, 由性質 i), 有 $T(\overline{n}_1) = n_2, \ldots, T(\overline{n}_k) = n_1$。因此

$$\overline{T}(\overline{n}_1) = \overline{n}_2, \ldots, \overline{T}(\overline{n}_k) = \overline{n}_1$$

可見, $(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \in \overline{H}_m$, 說明 F 爲滿射, 從而 F 是 $\overline{H}_m$ 到 H_m 的一一映射, 由證明過程還可知, 對應黑洞週長相等。

上述證明過程還給出了 H_m中黑洞的構造方法, 它們也是特徵數的性質:

iii) 若 $(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \in \overline{H}_m$, 則 $(T(\overline{n}_1), \ldots, T(\overline{n}_k)) \in H_m$;

iv) $T(\overline{n})$ 爲 (N_m, T) 中黑洞數 $\Longleftrightarrow \overline{n}$ 爲 $(\overline{N}_m, \overline{T})$ 中黑洞數;

v) 設 n_0 在 N_m 中黑程爲 $h(n_0)$, $\overline{n}_0$ 在 $\overline{N}_m$ 中黑程爲 $\overline{h}(\overline{n}_0)$, 如 $\overline{h}(\overline{n}_0) \neq 0$, 則 $h(n_0) = \overline{h}(\overline{n}_0) + 1$; 如 $\overline{h}(\overline{n}_0) = 0$, 則 $h(n_0) = 0$ 或1。

事實上, 記 $\overline{h}(\overline{n}_0) = d \neq 0$, 則 $\overline{T}(\overline{n}_0) = \overline{n}_1, \ldots, \overline{T}(\overline{n}_{k-1}) = \overline{n}_d$, 其中 $\overline{n}_0, \ldots, \overline{n}_{d-1}$ 均非黑洞數, 而 $\overline{n}_d$ 爲 $\overline{N}_m$ 中黑洞數, 仿定理1-10的證明過程可知, $T(n_0) = T(\overline{n}_0)$, $T(T(\overline{n}_0)) = T(\overline{n}_1), \ldots, T(T(\overline{n}_{d-1})) = T(\overline{n}_d)$, 由性質 iv, 知 $T(\overline{n}_0), \ldots, T(\overline{n}_{d-1})$ 非 N_m 中黑洞數, 而 $T(\overline{n}_d)$ 爲 N_m 中黑洞數, 因此 $h(n_0) = d + 1 = \overline{h}(\overline{n}_0) + 1$, 但當 $\overline{h}(\overline{n}_0) = 0$ 時, $\overline{n}_0$ 雖爲 $\overline{N}_m$ 中黑洞數, $\overline{n}_0$ 卻可能是也可能不是 N_m 中黑洞數, 因此 $h(n_0) = 0$ 或1。

5. 映射數列問題研究的意義與前景

由前面所舉的幾例不難看出, 映射數列 (1) 或與之相應的圖 (N', T) 的性質, 既與 n_0 (及相應的集合 N') 有關, 又同映射 T 有關, 於是就開闢了研究自然數的一個新的領域: 研究數在各種映射之下的性質, 數的動態性質。如果設

$$T(2) = 3, T(3) = 5, \ldots, T(p_{k-1}) = p_k, \ldots$$

$p_k (k = 1, 2, \ldots)$ 爲連續素數, 那麼我們對素數的研究, 也可看作對一種映射數列的研究。

由於映射 T 的多對性, 以及相應的圖論表示 (N', T), 這就給映射數列的研究開

闢了無限廣闊的前景。至於研究方法, 由於它既與數論、分析有關, 又同圖論聯繫, 乃是一種邊緣數學, 因此, 不僅可自如地運用已有的數論、圖論、函數論的成熟方法, 還可把它們融匯貫通, 創造獨等的方法。

但應注意的是: 雖然我們前面介紹的幾類都是週期數列, 可並不意味著只有週期映射數列才有研究價值。我們相信, 在大量非週期映射數列中, 也必然有大量值得研究的問題, 至於那些可能引向混沌映射數列 (把 N 擴充到複整數), 更會引人入勝, 還有二階的 $(T(n_{i-1}, n_i) = n_{i+1})$ 映射數列呢?

文獻:

1. Collatz, About the motivation of the $(3n+1)$-problem, 譯文刊「曲阜師大學報」, 1986年3月。
2. 楊之, 張忠輔, 角谷猜想與黑洞數問題的圖論表示,「自然雜志」,1988年6月。
3. 楊之, 自然數在變換下的性質及其圖論表示中的研究課題, 「中國初等數學研究文集」(楊世明主編), 湖南教育出版社,1992年6月。

—本文作者張忠輔任教於中國甘肅省蘭州鐵道學院, 楊世明任職於中國天津市寶坻縣教研室—

周鴻經先生事略

周鴻經綸閣先生，生於民國前十年，歿於民國四十六年，享年五十有六。先生天性淳厚，篤於孝友，英年續學，才華卓著。歷任中央大學數學系主任、訓導長、教務長、校長及中央研究院總幹事兼數學研究所所長。畢生從事數學研究及教育工作，不遺餘力。

先生早年留學英國，於抗戰時期毅然返國，共赴國難。戰時艱苦，衣食為勞，而先生仍能創著不絕，年有新猷，於富氏級數方面先後發表論文二十二篇，為當時國內年輕數學家之典範。

先生不僅對數學研究有卓異造詣，其於教育行政亦有建樹。多年執教，桃李滿天下，受其薰陶者，莫不眷眷於懷。

先生於勞力研究之餘，曾在各報章雜誌發表諸多數學教育文章，並編著中學教科書多冊為當時中學普遍採用，對於日後數學教育之改革有深遠之影響。

中央研究院周鴻經獎學金章程

第一條　中央研究院爲紀念數學研究所周故所長鴻經，鼓勵有志研習數學之學生，設置數學獎學金。

第二條　本獎學金暫定十二名，每名每年暫定新台幣貳萬元。

第三條　凡公私立大學或學院之數學系三年級以上學生或數學研究所之研究生數學成績優異者均可申請。

第四條　申請本獎學金之學生應於每年十一月十五日前，由所屬院校將下列各件彙送本院：

(1)志向說明書：

(2)在學各學年之成績單（一年級研究生須繳大學四年之成績單）

(3)數學系、所之教授二人以上之推薦書。

第五條　本獎學金之審核由本院數學研究所組織委員會行之，必要時得舉行面試，其結果於每年十二月十五日發表。獎學金於十二月及三月各付給總數之半。

第六條　本章程經院務會議通過院長核定後施行。





有了"數學傳播季刊選輯"
讓您大開眼界！

- ■數學傳播季刊創刊十年的里程碑
- ■由數十位專家共同執筆
- ■數學傳播季刊編輯部精心編輯
- ■適合高中以上程度閱讀

數學傳播季刊選輯

台北市南港區研究院路二段128號（電話：2785-1211轉382）
郵政劃撥：中央研究院數學研究所　帳號：0100434-8